

N° d'ordre: 3800

# **T H È S E**

présentée

**devant l'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

pour obtenir

**le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

Mention Mathématiques et Applications

**PAR**

**Viktoria HEU**

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

UFR de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

**Déformations isomonodromiques des connexions de rang 2  
sur les courbes**

SOUTENUE LE 28 NOVEMBRE 2008 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN

M.	D. BERTRAND	Examineur
M.	D. CERVEAU	Examineur
Mme.	H. ESNAULT	Examinatrice
M.	F. LORAY	Directeur de Travaux
M.	B. MALGRANGE	Examineur
M.	C. SABBAH	Rapporteur



# Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur de thèse, Frank Loray, de m'avoir fait confiance et de m'avoir guidée et encouragée pendant ces trois années. Je lui suis profondément reconnaissante de m'avoir transmis sa vision géométrique des mathématiques et de m'avoir fait découvrir un domaine de recherche que j'apprécie beaucoup.

Je remercie mes rapporteurs, Claude Sabbah et Sergei Yakovenko pour leur lecture attentive de ce manuscrit et pour leurs précieux conseils concernant sa rédaction. Merci à Hélène Esnault, Daniel Bertrand, Dominique Cerveau et Bernard Malgrange pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mon travail et pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Grâce à Gerhard Keller et Felix Ulmer je suis venue à Rennes et j'ai trouvé une ambiance accueillante à l'IRMAR. Je tiens à remercier l'ensemble du personnel et particulièrement tous les membres de l'équipe de géométrie analytique. Je voudrais également remercier Antoine Chambert-Loir, Laurent Moret-Bailly, Christophe Mourougane et surtout Antoine Ducros pour leur aide concernant les problèmes d'algébrisation dans le chapitre 3.

Merci à tous les doctorants de l'IRMAR pour l'ambiance chaleureuse qu'ils savent créer. Je suis reconnaissante pour toutes les discussions sur l'enseignement, notamment avec Anne-Claire. Merci aux participants du séminaire du midi, Yann, Mikaël, Noura, Clément, Lionel, Marie, Richard, Fanny, Pierre, Gweltaz, Aurélien, Sabine, Arnaud, Jérémy et Viviana. Merci à Mathilde et Sébastien pour la relecture de ce manuscrit, et pour leur soutien. Merci à Maher et aux membres de son bureau pour le monde à part qui s'est créé autour de leur cafetière. Je remercie également les anciens doctorants de l'IRMAR, Corentin, Jérôme, Olivier et Ferrán pour leur gentillesse. Merci enfin à Thomas et Audrey pour leur sensibilité et pour leur amitié.

Ich möchte mich herzlich bei meinen Professoren aus Erlangen für meine Ausbildung bedanken. Meinen Freunden aus Bayreuth, Erlangen und Berlin möchte ich liebe Grüße senden und mich für alle gemeinsamen Momente bedanken.

Bei euch, liebe Familie möchte ich mich besonders bedanken für eure Unterstützung, dass ihr immer für mich da wart und an mich geglaubt habt. Dies hat meine Doktorarbeit erst möglich gemacht.

Enfin, je remercie mon mari, Jean-Romain, d'avoir su supporter mes hauts et mes bas durant cette thèse, et de ne jamais oublier que celle-ci ne représente que l'une des nombreuses choses que nous allons construire ensemble.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Déformations isomonodromiques</b>	<b>5</b>
<b>2 Construction de la déformation isomonodromique universelle</b>	<b>11</b>
2.1 Propriété universelle . . . . .	11
2.2 Cas logarithmique : correspondance de Riemann-Hilbert . . . . .	13
2.3 Cas général : action de jets de difféomorphismes sur le recollement .	19
<b>3 Une version analytique du résultat de semi-continuité de Maruyama</b>	<b>23</b>
3.1 Nombre d'auto-intersection minimal des sections . . . . .	23
3.2 Résultat . . . . .	25
3.3 Rappels sur les familles analytiques de fibrés paramétrées par un germe	25
3.3.1 Familles de surfaces de Riemann paramétrées par un germe .	25
3.3.2 Relever un fibré en $\mathbb{P}^1$ en un fibré vectoriel . . . . .	27
3.3.3 Rappel d'un théorème de Grauert-Remmert . . . . .	30
3.3.4 Comportement des projectivisés des sections sur le fibré vectoriel	31
3.4 Démonstration du résultat de semi-continuité . . . . .	33
3.4.1 Existence de trois sections en position générale . . . . .	33
3.4.2 Se ramener à un problème sur le fibré trivial . . . . .	36
3.4.3 Construction de $T_k$ à partir de fermés de Zariski . . . . .	40
3.5 Corollaire : section globale avec nombre d'auto-intersection constant .	43
<b>4 Stabilité maximale des fibrés vectoriels le long de déformations isomonodromiques</b>	<b>45</b>
4.1 Degré de stabilité . . . . .	45
4.2 Résultat principal . . . . .	46

4.3	Preuve du résultat principal . . . . .	48
4.3.1	Interprétation en termes de feuilletages de Riccati . . . . .	48
4.3.2	Se ramener à un problème de transversalité . . . . .	50
4.3.3	Le cas réductible . . . . .	51
4.3.4	Le cas avec trace . . . . .	53
4.4	Applications . . . . .	55
4.4.1	Structures projectives branchées . . . . .	55
4.4.2	Forme normale de Birkhoff pour les singularités irrégulières . .	55
4.5	Exemple explicite . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Perspectives</b>	<b>59</b>
<b>A</b>	<b>Isomonodromic deformations and maximally stable bundles</b>	<b>61</b>
A.1	Introduction . . . . .	61
A.1.1	Result . . . . .	61
A.1.2	Applications . . . . .	64
A.2	Definitions and elementary properties . . . . .	66
A.2.1	Flat meromorphic connections and monodromy . . . . .	67
A.2.2	Projective connections and Riccati foliations . . . . .	69
A.2.3	Isomonodromic deformations . . . . .	70
A.2.4	Bimeromorphic and elementary transformations . . . . .	75
A.3	The universal isomonodromic deformation . . . . .	78
A.3.1	Construction . . . . .	81
A.3.2	Universal Property . . . . .	95
A.3.3	Special cases with automorphisms . . . . .	102
A.4	Explicit example . . . . .	104
A.5	Proof of the main result . . . . .	107
A.5.1	Filtration of the parameter space . . . . .	108
A.5.2	A formula of M. Brunella . . . . .	109
A.5.3	Trivial deformations for small self-intersection numbers . . . .	111
A.5.3.1	Proof in the logarithmic or non-singular case : tri- viality of the curve deformation . . . . .	114
A.5.3.2	Proof in the case of multiple poles : triviality of the deformation . . . . .	118
A.6	Further comments . . . . .	123
A.6.1	Result for reducible connections . . . . .	123
A.6.2	Remarks on undeformable connections . . . . .	125
A.6.3	Remarks on connections with trace . . . . .	126

<i>Table des matières</i>	vii
<b>Bibliographie</b>	<b>127</b>
<b>Table des figures</b>	<b>135</b>





# Introduction

Les déformations isomonodromiques sont apparues pour la première fois au début du 20<sup>ème</sup> siècle, dans l'article [Fuc05] de R. Fuchs. En continuant les travaux de son père, L. Fuchs, publiés de 1888 à 1898 dans «Sitzungsberichte des Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften», ce dernier a découvert l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q}{dt^2} = & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-t} \right) \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 - \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{q-t} \right) \frac{dq}{dt} \\ & + \frac{q(q-1)(q-t)}{2t^2(t-1)^2} \left( \kappa_\infty^2 - \kappa_0^2 \frac{t}{q^2} + \kappa_1^2 \frac{t-1}{(q-1)^2} + (1 - \kappa_t^2) \frac{t(t-1)}{(q-t)^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Depuis l'article [Gam06] de B. Gambier, cette équation est connue comme l'équation VI de Painlevé, dont les cinq autres équations de Painlevé peuvent se déduire. Jusque-là, les solutions des équations de Painlevé étaient connues seulement pour leur propriété d'être des «nouvelles» fonctions transcendentes, ayant un bon prolongement analytique. Cependant, R. Fuchs a découvert que l'équation différentielle (1) décrit en fait les déformations isomonodromiques de certains systèmes linéaires d'équations différentielles. Ces systèmes sont définis sur  $\mathbf{P}^1$  par les équations de la forme

$$dY = \left( \frac{A_0}{x} + \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_t}{x-t} \right) Y dx, \quad (2)$$

où les  $A_i$  sont des matrices dans  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ . Ici et par la suite nous notons  $\mathbf{P}^1$ , ou  $\mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ , la droite projective complexe. Une propriété topologique très importante des solutions d'un tel système est celle de la «monodromie». Dans l'équation (2), permettons à  $t$  de varier dans le revêtement universel  $\mathbf{H}$  de  $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ , et considérons des matrices  $A_0, A_1$  et  $A_t$  fonctions de ce paramètre  $t$ . Nous obtenons ainsi une famille de systèmes

$$dY = \left( \frac{A_0(t)}{x} + \frac{A_1(t)}{x-1} + \frac{A_t(t)}{x-t} \right) Y dx, \quad (3)$$

sur  $\mathbf{P}^1$ . En général, une telle déformation est dite «isomonodromique» si la monodromie est constante par rapport au paramètre  $t$ . La monodromie le long d'une famille (3) est constante si les systèmes associés aux différentes valeurs de  $t$  sont compatibles au sens où la famille (3) est «intégrable», quitte à rajouter des termes en  $dt$ . Les solutions d'un système d'équations différentielles, et donc aussi leur monodromie, ne sont pas toujours faciles à calculer. En considérant des déformations isomonodromiques, nous pouvons toutefois étudier certaines propriétés des systèmes sous-jacents, sans avoir à calculer leurs solutions explicitement.

Dans un langage plus moderne, les systèmes (2) représentent les «fibrés à connexion» avec quatre pôles simples  $(0, 1, t, \infty)$  sur la sphère de Riemann, dont le fibré vectoriel sous-jacent est le fibré trivial. Dans cette thèse, nous étudions plus généralement les fibrés à connexion méromorphe sur des surfaces de Riemann compactes de genre quelconque, sans exigences particulières sur le fibré vectoriel sous-jacent. Par contre, comme dans le cas des systèmes (2), nous demandons que le fibré à connexion soit de «type  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ », c'est-à-dire de rang 2 et sans trace.

Nous construisons la déformation isomonodromique universelle globale d'un tel fibré à connexion. Elle est universelle au sens où toute autre déformation isomonodromique s'obtient de manière unique (sauf pour des cas spéciaux) comme image réciproque par une application de classification de la déformation universelle. Elle est globale au sens où la propriété universelle ne concerne pas seulement les germes de déformations isomonodromiques. Pour les connexions logarithmiques (à pôles simples) en genre 0, cette construction est due à B. Malgrange. Il utilise la «version holomorphe» de la correspondance de Riemann-Hilbert selon P. Deligne, dont nous rappelons la démonstration. Nous généralisons cette méthode pour les connexions logarithmiques en genre quelconque à l'aide de la théorie de Teichmüller. Enfin nous la généralisons pour les connexions méromorphes (à pôles multiples) en genre quelconque. Une telle construction a été effectuée par I. Krichever, valable en rang quelconque mais uniquement pour les connexions non résonantes. Grâce au fait que nous nous restreignons au cas des connexions de rang 2 sans trace, nous pouvons développer une approche plus élémentaire de la construction de la déformation isomonodromique universelle, au sens où nous n'avons pas besoin d'analyser les phénomènes de Stokes en les singularités irrégulières. Ceci nous permet de traiter, pour le cas  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  toujours, le cas des singularités résonantes de manière naturelle. Ainsi nous englobons aussi l'application au cas  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  de la construction locale de B. Malgrange concernant le cas d'un fibré à connexion résonante où la partie la plus polaire de la matrice de connexion ne possède qu'un seul bloc de Jordan par valeur propre.

Dans le cas des équations de Painlevé, nous avons vu que l'on s'intéresse

aux déformations de fibrés à connexion dont le fibré vectoriel sous-jacent est le fibré trivial  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^2$ . Rappelons que le fibré trivial est le seul fibré vectoriel semi-stable de degré 0 sur la sphère de Riemann. De manière plus générale, les équations des déformations isomonodromiques étudiées décrivent le plus souvent des déformations isomonodromiques de fibrés à connexion, dont le fibré sous-jacent est semi-stable. Le fait de ne considérer que des fibrés semi-stables permet en effet de recourir à une théorie consistante d'espace de modules. Nous montrons que cette restriction est en fait naturelle, dans un sens précisé par la suite.

Nous nous intéressons alors à la stabilité d'un fibré vectoriel de rang 2, qui peut être muni d'une connexion méromorphe irréductible sans trace. A. Bolibruch a étudié le cas de certains fibrés de rang 2 à connexion très particuliers avec pôles simples sur la sphère de Riemann. Dans [Bol90], il montre que le fibré vectoriel sous-jacent est trivial, autrement dit semi-stable, quitte à déformer la connexion en bougeant arbitrairement peu la position des pôles. Dans le cas général des fibrés à connexion méromorphe sur des surfaces de Riemann compactes de genre quelconque, nous montrons que le fibré vectoriel sous-jacent est semi-stable, quitte à faire une déformation isomonodromique arbitrairement petite. Plus précisément, nous montrons que le fibré vectoriel sous-jacent à la déformation isomonodromique universelle d'un tel fibré à connexion est génériquement semi-stable, et même «maximalement» stable. Cela est le résultat principal de cette thèse. Précisons que ce résultat s'applique aux fibrés à connexion méromorphe, donc pour des pôles d'ordre arbitraire. Pour des connexions non singulières, c'est-à-dire sans pôles, l'assertion de ce théorème est non triviale, dès que le genre est supérieur à 1. Nous énonçons un corollaire de ce théorème concernant les feuilletages de Riccati, qui sont des fibrés à connexion projectivisés. La démonstration de notre théorème principal est en fait basée sur les nombreuses propriétés géométriques de ces derniers. Nous expliquons comment le point de vue des feuilletages de Riccati permet de déduire une application directe du théorème principal pour les structures projectives branchées.

Comme résultat préliminaire, nous montrons que si le fibré vectoriel  $E_t$  qui varie le long d'une déformation isomonodromique  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  est semi-stable (resp. «maximalement» stable) pour un certain paramètre  $t \in T$ , alors tel est le cas pour tout paramètre générique, c'est-à-dire en dehors d'un sous-ensemble analytique fermé. Ceci est la conséquence immédiate d'un des résultats généraux sur les familles analytiques de fibrés vectoriels exposés dans la partie 4.

De plus, nous décrivons un exemple de déformation isomonodromique d'un système, où nous donnons explicitement l'ensemble exceptionnel, c'est-à-dire l'ensemble des paramètres tels que le fibré vectoriel sous-jacent n'est pas trivial.

Nous remarquons grâce à cet exemple que l'ensemble exceptionnel, qui est un sous-ensemble analytique fermé d'après le théorème principal, peut être non algébrique.

# Chapitre 1

## Déformations isomonodromiques

Dans cette partie, nous définissons les principaux objets étudiés dans cette thèse.

### a) Fibrés de rang 2 à connexion sans trace

Nous considérons des fibrés vectoriels holomorphes  $E_0$  de rang 2 sur des surfaces de Riemann  $X_0$  compactes de genre arbitraire, munis de connexions méromorphes  $\nabla_0$  sans trace. En chaque carte de trivialisat on locale  $U \times \mathbf{C}^2$  du fibré  $E_0$ , avec des coordonnées  $(x, Y)$ , la *connexion*  $\nabla_0$  est donnée par un système d'équations différentielles

$$dY = A(x)Y, \tag{1.1}$$

tel que les coefficients de la matrice de connexion  $A$  sont des 1-formes méromorphes sur  $U$  avec  $\text{tr}(A) \equiv 0$ . Sur l'intersection de deux telles cartes, nous pouvons nous ramener à des coordonnées communes  $(\tilde{x}, \tilde{Y})$ , quitte à faire une transformation de coordonnées, une transformation de jauge ou une combinaison des deux. Une transformation de coordonnées  $\tilde{x} = \varphi(x)$  nous amène à considérer la matrice de connexion

$$\tilde{A}(\tilde{x}) = \varphi^* A(\tilde{x}).$$

D'autre part, une transformation de jauge  $\tilde{Y} = \phi(x)Y$  avec  $\phi \in \text{SL}(2, \mathcal{O})$  nous amène à considérer la matrice de connexion

$$\tilde{A} = \phi A \phi^{-1} + (d\phi)\phi^{-1}.$$

Nous notons ici  $\mathcal{O}$  le faisceau des fonctions holomorphes, et nous étudions uniquement les transformations de jauge holomorphes. En des coordonnées

communes, les matrices de connexion provenant des deux cartes voisines doivent coïncider. Dans cette thèse, nous allons toujours considérer des fibrés à connexion  $(E_0, \nabla_0)$  modulo transformations de jauge et de coordonnées holomorphes. Le plus souvent, les coordonnées sur la courbe de base seront fixées. Nous disons alors que deux fibrés à connexion définis sur cette courbe sont isomorphes s'ils coïncident modulo transformation de jauge.

#### b) Représentation de monodromie

Notons  $D_0$  le diviseur réduit des pôles des matrices de connexion  $A$  sur  $X_0$ . Les points de  $X_0 \setminus D_0$  sont alors appelés les *points non singuliers* de la connexion. En tout point non singulier, nous pouvons choisir une solution fondamentale  $S$ , c'est-à-dire une base du  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension 2 qui décrit les solutions locales du système (1.1) associé. Soit  $\gamma$  un lacet simple dans l'ensemble des points non singuliers. Nous pouvons alors considérer les prolongements analytiques de  $S$  le long de  $\gamma$ , définis successivement dans des ouverts recouvrant  $\gamma$ . Au point de retour, nous obtenons une nouvelle solution fondamentale  $S^\gamma$ , qui est une nouvelle base du même espace des solutions locales. Il existe alors une matrice constante  $\rho(\gamma)$ , telle que  $S^\gamma = \rho^{-1}(\gamma)S$ . Elle est appelée la monodromie le long de  $\gamma$ . Il se trouve que

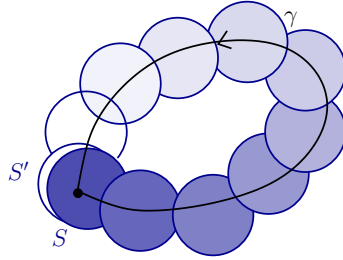


FIG. 1.1 – Monodromie le long de  $\gamma$

cette monodromie ne dépend que de la classe d'homotopie  $[\gamma]$  de  $\gamma$  dans  $\pi_1(X_0 \setminus D_0)$ . Nous définissons ainsi la *représentation de monodromie*

$$\begin{aligned} \rho : \pi_1(X_0 \setminus D_0) &\rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \\ [\gamma] &\mapsto \rho(\gamma) \end{aligned} ,$$

que nous considérons modulo des conjugaisons simultanées de l'image par des matrices dans  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ , afin que la représentation de monodromie ne dépende pas du choix de la solution fondamentale initiale.

Pour tout lacet  $\gamma$  dans  $\pi_1(X_0 \setminus D_0)$ , la classe de conjugaison de  $\rho(\gamma)$  est bien

définie par la représentation de monodromie. Notons  $D_0^1, \dots, D_0^m$  les pôles du fibré à connexion  $(E_0, \nabla_0)$ . Si  $\gamma$  décrit un tour autour d'un pôle  $D_0^i$  (de la manière usuelle) pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ , la classe de conjugaison de  $\rho(\gamma_i)$  est appelée la *monodromie locale* au pôle  $D_0^i$ .

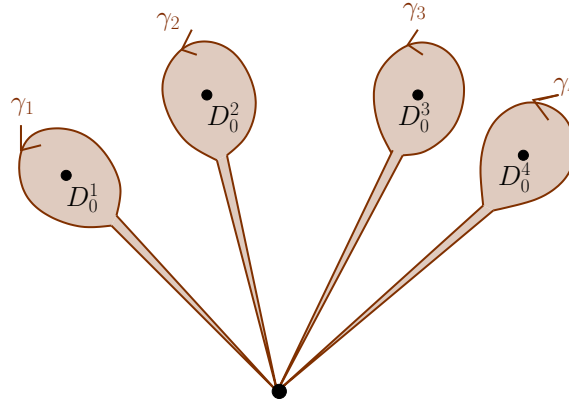


FIG. 1.2 – Aux lacets  $\gamma_i$  nous pouvons associer la monodromie locale au pôle  $D_0^i$

### c) Déformations isomonodromiques

Nous étudions dans cette thèse les déformations isomonodromiques d'un fibré à connexion  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  de rang 2 sans trace sur une surface de Riemann compacte, le long desquelles la courbe, la position des pôles, le fibré et la connexion peuvent varier. De manière simpliste, on peut dire qu'une déformation isomonodromique de  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  est une déformation  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$ , sur une famille analytique  $(X_t)_{t \in T}$  de surfaces de Riemann, qui est topologiquement triviale et telle que l'ordre des pôles et les données de monodromie sont constants le long de la déformation. Ici, une déformation est dite topologiquement triviale si la famille de surfaces de Riemann associée est topologiquement triviale, si l'espace des paramètres  $T$  est contractile et si le diviseur réduit des pôles des matrices de connexion de  $(\nabla_t)_{t \in T}$  est lisse et donné par des sections disjointes  $\mathcal{D}^i : T \rightarrow \mathcal{X}$  avec  $i \in \{1, \dots, m\}$ , où  $\mathcal{X}$  est l'espace total de la déformation de la courbe. Le diviseur réduit des pôles sera noté  $\mathcal{D}$  ou  $(D_t)_{t \in T}$ . En utilisant le langage de la théorie de Teichmüller (cf. [Nag88]), nous parlons aussi d'une famille de courbes *marquées*  $(X_t, D_t)_{t \in T}$ . Ceci permet d'identifier canoniquement les groupes fondamentaux des courbes pointées  $X_t \setminus D_t$  pour chaque paramètre  $t$  et de comparer les représentations de monodromie. Précisons que nous

disons que l'ordre des pôles est constant si, pour tout paramètre  $t \in T$ , l'ordre du pôle  $D_t^i$  du fibré à connexion  $(E_t, \nabla_t)$  est égal à l'ordre du pôle  $D_0^i$  du fibré à connexion initial  $(E_0, \nabla_0)$ .

Dans le cas non singulier et dans le cas des pôles simples, les données de monodromie sont réduites à la représentation de monodromie

$$\rho : \pi(X_0 \setminus D_0) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}).$$

Excluons dans un premier temps les singularités *projectivement apparentes*, dont la monodromie locale est égal à  $\pm I$ . Dans ce cas, toute déformation analytique et topologiquement triviale est à données de monodromie constantes si, et seulement si elle est induite par un fibré à connexion intégrable  $(\mathcal{E}, \nabla)$  avec pôles simples sur  $\mathcal{X}$ . Afin d'englober les fibrés à connexion avec des singularités projectivement apparentes de manière cohérente, nous demandons en plus au fibré à connexion intégrable définissant une déformation isomonodromique d'être *logarithmique*, c'est-à-dire tel que  $dA$  est holomorphe pour les matrices de connexion  $A$ . En fait, tout fibré à connexion intégrable qui n'a que des pôles simples non projectivement apparents est automatiquement logarithmique.

Dans le cas méromorphe général, c'est-à-dire avec des pôles d'ordre quelconque, des données de Stokes (*i.e.* matrices de Stokes et paramètres formels) sont rajoutées aux données de monodromie dans les travaux de B. Malgrange, J. Palmer et I. Krichever. La définition même de ces données de Stokes nécessite en chaque pôle une condition de *non-résonance*. Plus précisément, la matrice constante donnée par le terme principal de la matrice de connexion en un pôle doit être à valeurs propres distinctes (*cf.* [Mal83a], page 428), voire à valeurs propres distinctes modulo  $\mathbf{Z}$  pour des pôles d'ordre 1 (*cf.* [Pal99], page 6650). La définition usuelle d'une déformation «isomonodromique et iso-Stokes» d'un fibré à connexion initial de type  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  est alors la suivante.

**Définition 1.1** *Une déformation (analytique et topologiquement triviale)  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  d'un fibré à connexion initial  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  de rang 2 sans trace et non résonant est une déformation isomonodromique si*

- l'ordre des pôles est constant le long de la déformation,
- elle est induite par un fibré à connexion  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  intégrable et
- les matrices de connexion  $A$  de  $\nabla$  satisfont

$$(dA)_\infty \leq (A)_\infty, \tag{1.2}$$

où  $(\cdot)_\infty$  désigne le diviseur des pôles.



Par «diviseur des pôles» nous entendons toujours le «diviseur effectif des pôles».

Pour un fibré à connexion intégrable de type  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ , la condition (1.2) est superflue si le fibré à connexion ne possède pas de singularité  $\mathcal{D}^i$  qui est projectivement apparente au sens suivant : il existe une transformation de jauge *méromorphe* projective telle que le fibré à connexion projectif obtenu par cette transformation est non singulier en  $\mathcal{D}^i$ . D'autre part, nous allons voir que la condition (1.2) pour les déformations isomonodromiques nous permet englober de manière cohérente le cas des fibrés à connexion de type  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  qui possèdent des singularités résonantes.

Soient  $(x_1, \dots, x_N)$  des coordonnées locales de  $\mathcal{X}$ , où le diviseur réduit des pôles est donné par  $\{x_1 = 0\}$ . Alors la condition (1.2) sur le diviseur est équivalente au fait que la matrice de connexion  $A$  peut s'écrire sous la forme

$$A = M_1 \frac{dx_1}{x_1^l} + \sum_{i=2}^N M_i \frac{dx_i}{x_i^{l-1}}, \quad (1.3)$$

où  $M_i$  est une matrice  $2 \times 2$  dont les coefficients sont des fonctions holomorphes en  $(x_1, \dots, x_N)$ , et  $l$  est l'ordre du pôle considéré. Pour des coordonnées de trivialisation locale  $(t, x)$  de la fibration en courbes, la condition de (1.2) sur le diviseur en combinaison avec la condition (1.3) se traduit par une transversalité du fibré à connexion  $(E_t, \nabla_t)_{t \in T}$  avec le paramètre  $t$ . Comme l'ordre des pôles est constant, la matrice  $M_1$  ne s'annule pas sur  $\{x_1 = 0\}$ .

**Proposition 1.2** *Au voisinage de chaque point du diviseur, la condition (1.2) avec  $M_1|_{\{x_1=0\}} \neq 0$  équivaut à l'existence de coordonnées locales pour lesquelles la matrice de connexion est équivalente par transformation de jauge à une matrice de la forme*

$$A = \widetilde{M}_1 \frac{dx_1}{x_1^l}, \quad (1.4)$$

avec  $\widetilde{M}_1|_{\{x_1=0\}} \neq 0$ .

**Démonstration :** Il est clair qu'une matrice  $A$  de la forme (1.4) satisfait la condition (1.2). Réciproquement, en tout point du diviseur, il y a un

coefficient de la matrice  $M_1$  dans (1.3) qui ne s'annule pas. Quitte à faire une transformation de coordonnées, le coefficient correspondant de la matrice  $A$  se redresse de manière à ce qu'il ne dépende plus de  $dx_i$  pour  $i > 1$ . En utilisant plusieurs fois la condition d'intégrabilité  $dA \equiv A \wedge A$ , et en appliquant des transformations de jauge appropriées, nous pouvons alors mettre la matrice  $A$  sous la «forme normale» suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c(x_1) & 0 \end{pmatrix} \frac{dx_1}{x_1^l},$$

où  $c$  est une fonction holomorphe. Pour les calculs explicites, nous nous référons au lemme A.15 de l'annexe.  $\square$

Pour nos coordonnées  $(t, x)$ , cela signifie que la matrice de connexion est *constante*, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du paramètre  $t$ , quitte à faire une transformation de jauge et de coordonnées. Nous imposons que les transformations de jauge et de coordonnées laissent le paramètre  $t = (t_1, \dots, t_{N-1})$  invariant, autrement dit qu'elles soient de la forme

$$(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{Y}) = (t, \varphi(t, x), \phi(t, x) \cdot Y).$$

Comme nous ne considérons que des fibrés à connexion de rang 2 et sans trace dans cette thèse, nous pouvons utiliser la propriété établie dans la proposition 1.2 comme définition alternative de déformation isomonodromique.

**Définition 1.3** *Une déformation (analytique et topologiquement triviale)  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  d'un fibré à connexion initial  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  de rang 2 sans trace est une déformation isomonodromique, si elle est induite par un fibré à connexion  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  intégrable et localement constant.*

D'après la proposition 1.2, cette définition est équivalente (dans le cas non résonant) à la définition habituelle 1.1. Cette équivalence utilise de manière essentielle le fait que nous ne considérons que des fibrés à connexion de type  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ .

## Chapitre 2

# Construction de la déformation isomonodromique universelle

Cette partie est consacrée à la déformation isomonodromique universelle globale. Nous nous contentons ici de donner les principaux éléments de sa construction. Pour les détails, le lecteur pourra se reporter à la section A.3 de l'annexe.

### 2.1 Propriété universelle

Soit  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  un fibré à connexion initial de rang 2 et sans trace. Nous construisons sa *déformation isomonodromique universelle globale*  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$ , qui est définie sur une famille  $\mathcal{X} \rightarrow T$  de courbes. Cette déformation isomonodromique est universelle au sens où toute autre déformation isomonodromique contenant  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  s'obtient de manière unique (sauf pour des cas spéciaux) comme image réciproque par une application de classification de la déformation isomonodromique universelle. Plus formellement, la déformation isomonodromique universelle satisfait le théorème suivant.

**Théorème 2.1 (Propriété universelle)** *Soit  $(\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\nabla})$  une déformation isomonodromique d'un fibré à connexion initial  $(\tilde{E}_0 \rightarrow \tilde{X}_0, \tilde{\nabla}_0)$  avec espace des paramètres  $\tilde{T}$  dont nous notons  $\tilde{t}_0$  le paramètre initial. Supposons qu'il existe un isomorphisme de courbes marquées  $F_0 : (\tilde{X}_0, \tilde{D}_0) \xrightarrow{\sim} (X_0, D_0)$  ainsi qu'un isomorphisme de fibrés à connexion  $\Psi_0 : (\tilde{E}_0, \tilde{\nabla}_0) \xrightarrow{\sim} (E_0, \nabla_0)$  selon le diagramme*

commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{E}_0, \tilde{\nabla}_0) & \xrightarrow[\sim]{\Psi_0} & (E_0, \nabla_0) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\tilde{X}_0, \tilde{D}_0) & \xrightarrow[\sim]{F_0} & (X_0, D_0) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \{\tilde{t}_0\} & \xrightarrow{f_0} & \{t_0\},
 \end{array}$$

où  $\Psi_0 = (F_0, \psi_0)$  est donné par une transformation de jauge  $\psi_0 : (\tilde{E}_0, \tilde{\nabla}_0) \xrightarrow{\sim} F_0^*(E_0, \nabla_0)$ . Alors il existe un triplet  $(f, F, \Psi)$  qui étend  $(f_0, F_0, \Psi_0)$  selon le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\nabla}) & \xrightarrow{\Psi} & (\mathcal{E}, \nabla) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{D}}) & \xrightarrow{F} & (\mathcal{X}, \mathcal{D}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{T} & \xrightarrow{f} & T,
 \end{array}$$

où  $(f, F)$  est une paire d'applications holomorphes telle que pour tout paramètre  $\tilde{t} \in \tilde{T}$ ,  $F|_{\tilde{t}} : \tilde{X}_{\tilde{t}} \rightarrow X_t$  est un biholomorphisme de surfaces de Riemann marquées, et  $\Psi = (F, \psi)$  est donné par une transformation de jauge  $\psi : (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\nabla}) \xrightarrow{\sim} F^*(\mathcal{E}, \nabla)$ .

Le triplet  $(f, F, \Psi)$  est unique pourvu que  $(g, n)$  soit différent de  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  et  $(1, 0)$ , où  $g$  est le genre de la courbe  $X_0$  et  $n$  est le nombre de pôles comptés avec multiplicité.

Nous voyons en particulier que la déformation isomonodromique universelle de  $(E_0, \nabla_0)$  est également pour tout paramètre  $t \in T$  la déformation isomonodromique universelle du fibré à connexion  $(E_t, \nabla_t)$  qu'elle contient.

De plus, la déformation isomonodromique universelle ne contient pas de sous-déformations triviales, pourvu que  $(g, n)$  soit différent de  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  et  $(1, 0)$ .

**Remarque 2.2** Dans les cas particuliers  $(g, n) = (0, 0)$ ,  $(0, 1)$ , et  $(0, 2)$ , le fibré à connexion initial est en fait indéformable, c'est-à-dire sa déformation isomonodromique universelle est réduite au fibré à connexion initial. Le cas spécial

$(g, n) = (1, 0)$  du fibré à connexion trivial sur un tore complexe joue un rôle particulier. Dans tous ces cas spéciaux, l'application  $F$  du théorème ci-dessus n'est pas unique à cause d'automorphismes non triviaux de la courbe. Cependant, une fois que l'application  $F$  est fixée, l'isomorphisme  $\psi$  du théorème ci-dessus est unique.

## 2.2 Cas logarithmique : correspondance de Riemann-Hilbert

Dans le cas d'une connexion initiale non singulière ou logarithmique, nous suivons la méthode de B. Malgrange dans [Mal83a] et [Mal04] pour construire la déformation isomonodromique universelle. Cette méthode utilise la correspondance de Riemann-Hilbert qui a été établie dans les travaux de Deligne (cf. [Del70] ou [Kat76]) en deux versions. L'une, qui est utilisée le plus souvent, concerne les fibrés à connexion qui sont considérés modulo transformation de jauge *méromorphe*. Comme nous ne permettons que des transformations de jauge *holomorphes*, nous utiliserons l'autre version, c'est-à-dire la version «holomorphe» de la correspondance de Riemann-Hilbert. Cette version, qui est plus fine, nécessite la notion de «résidu» en un pôle logarithmique. En cette section, nous ne considérons que le cas des fibrés à connexion logarithmique dont le diviseur des pôles est une réunion disjointe d'hypersurfaces lisses et simplement connexes. Une correspondance de Riemann-Hilbert peut être établie pour le cas des diviseurs à croisements normaux, mais cela ne sera pas nécessaire pour la suite.

Dans des coordonnées locales, au voisinage d'un pôle logarithmique, écrivons la matrice de connexion  $A$  d'un fibré à connexion sous la forme

$$A(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{x_1} A_0 + \tilde{A}(x_1, \dots, x_N),$$

où  $A_0$  est une matrice constante non nulle et  $\tilde{A}$  est une matrice à coefficients holomorphes. Les valeurs propres de la matrice  $A_0$  sont alors appelées les *résidus* au pôle  $\{x_1 = 0\}$ . Les résidus ne dépendent pas de la carte de trivialisatation choisie.

Dans sa version holomorphe de la correspondance de Riemann-Hilbert, P. Deligne ne considère que les fibrés à connexion logarithmique dont tous les résidus appartiennent à l'intervalle  $[0, 1]$ , ce qui exclut le cas des singularités projectivement apparentes. Le fait de ne considérer que les fibrés à connexion de type  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  nous permettra par la suite d'énoncer une correspondance de Riemann-Hilbert sans condition sur les résidus, qui sera donc valable également pour le cas des singularités projectivement apparentes.

Fixons une variété complexe  $M$  avec un diviseur  $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^m \mathcal{D}^i$  composé d'une réunion disjointe de diviseurs lisses, irréductibles et simplement connexes de co-

dimension 1. Donnons-nous un nombre complexe  $\theta^i$  pour chaque  $i \in \{1, \dots, m\}$ , et un ensemble de générateurs du groupe fondamental de  $M \setminus \mathcal{D}$ , contenant des lacets  $\gamma_i$  décrivant un tour autour des  $\mathcal{D}^i$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$  de la manière habituelle, voir figure 1.2.

La représentation de monodromie définit l'application  $RH$  de Riemann-Hilbert entre les deux ensembles suivants, représentés de manière schématique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fibrés de rang 2 à connexion} \\ \text{intégrable sans trace} \\ \text{sur } M \text{ avec pôles logarith-} \\ \text{miques en } \mathcal{D} \text{ et résidus} \\ \theta^i, -\theta^i \text{ le long de } \mathcal{D}^i \\ \text{pour } i \in \{1, \dots, m\} \end{array} \right\} \xrightarrow{RH} \left\{ \begin{array}{l} \text{représentations} \\ \rho : \pi_1(M \setminus \mathcal{D}) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbf{C}) \\ \text{telles que les valeurs} \\ \text{propres de } \rho(\gamma_i) \text{ sont} \\ \exp(\theta^i 2i\pi) \text{ et } \exp(-\theta^i 2i\pi) \\ \text{pour } i \in \{1, \dots, m\} \end{array} \right\} / \sim.$$

L'ensemble de gauche est considéré modulo l'action des transformations de jauge holomorphes, celui de droite modulo l'action par conjugaison des éléments de  $\text{SL}(2, \mathbf{C})$ . L'application  $RH$  est bijective si  $\theta^i \notin \frac{1}{2}\mathbf{Z} \setminus \{0\}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . De manière générale, cette application est surjective.

L'obstruction à l'injectivité provient des singularités projectivement apparentes. Une singularité logarithmique est projectivement apparente si la matrice de connexion associée est diagonalisable par des transformations de jauge et si ses résidus appartiennent à  $\frac{1}{2}\mathbf{Z} \setminus \{0\}$ . Au niveau de la monodromie cela est équivalent au fait que la monodromie locale en ce pôle est égale à  $\pm I$ . Au voisinage d'une telle singularité, il existe une transformation de jauge méromorphe projective, telle que le fibré à connexion projectif associé est non singulier en ce point. De plus, si la monodromie locale d'une telle singularité est l'identité, alors nous n'avons pas besoin de projectiviser pour pouvoir désingulariser le fibré à connexion par une transformation de jauge méromorphe.

En chaque singularité projectivement apparente  $\mathcal{D}^{i_j}$ , l'espace des solutions locales du fibré à connexion a une droite spéciale  $L_{i_j}$ . Cette droite est l'ensemble de toutes les solutions locales qui se prolongent holomorphiquement au pôle considéré après projectivisation.

La position de cette droite spéciale ne peut pas dépendre de la monodromie seule, à cause du fait que la monodromie locale associée est projectivement triviale (*cf.* figure 2.1). Il existe alors en général une famille à un paramètre avec monodromie constante, obtenue en ne faisant varier que la position de la droite spéciale d'un pôle projectivement apparent.

L'injectivité de l'application de Riemann-Hilbert peut être établie dans le cas général si on ajoute aux données de chaque représentation de monodromie des

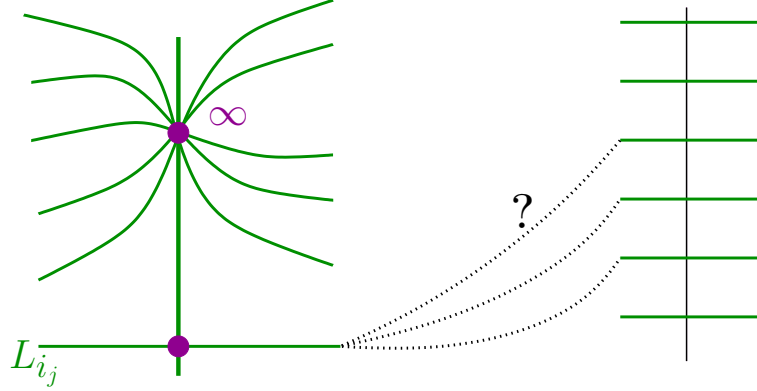


FIG. 2.1 – Dans cette illustration, nous avons projectivisé le fibré à connexion. Les positions différentes de la droite spéciale en une singularité projectivement apparente par rapport à une fibre générique correspondent à des fibrés à connexion différents, qui ont tous la même monodromie.

données de droites spéciales en chaque pôle  $\mathcal{D}^{i_j}$  avec  $\theta^{i_j} \in \frac{1}{2}\mathbf{Z} \setminus \{0\}$ . Un tel pôle est dit résonant, et il n'est pas forcément projectivement apparent pour un fibré à connexion donné. Comme elles sont caractérisées uniquement par une condition sur les résidus, il est plus opportun de traiter à part toutes les singularités résonantes et non pas seulement les singularités projectivement apparentes.

Au niveau de la monodromie, une singularité résonante se distingue par le fait que, soit la monodromie locale associée est égale à  $\pm I$  (dans le cas projectivement apparent), soit elle possède une unique droite invariante dans  $\mathbf{C}^2$ . Au niveau des fibrés à connexion, une singularité résonante (projectivement apparente ou non) se distingue par le fait que l'espace des solutions locales associé contient une unique droite formée des solutions locales qui sont bornées localement dans un voisinage du pôle.

Nous allons maintenant construire une application modifiée  $\widetilde{RH}$  de Riemann-Hilbert. Notons  $i_1, \dots, i_\mu$  les éléments de  $\{1, \dots, m\}$  tels que les  $\theta^{i_j}$  appartiennent à  $\frac{1}{2}\mathbf{Z} \setminus \{0\}$ . Rappelons qu'au départ nous avons choisi des lacets  $\gamma_i$  dans le groupe fondamental qui sont associés à chacun des diviseurs  $\mathcal{D}^i$ . Pour les singularités résonantes  $\mathcal{D}^{i_j}$  avec  $j \in \{1, \dots, m\}$  nous devons être plus précis dans la donnée de ces lacets. Pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ , donnons-nous un point  $a_{i_j}$  de  $M$  suffisamment proche de  $\mathcal{D}^{i_j}$ , et un chemin simple  $\delta_{i_j}$  reliant le point base  $a_0$  du groupe fondamental au point  $a_{i_j}$ . Nous définissons alors  $\gamma_{i_j}$  par un lacet qui suit

le chemin  $\delta_i$ , décrit ensuite un tour positif suffisamment petit autour de  $\mathcal{D}^{i_j}$  et revient en suivant le chemin  $\delta_{i_j}$  en sens inverse.

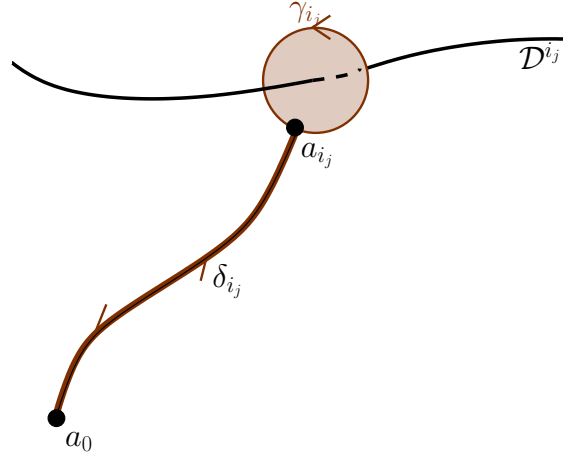


FIG. 2.2 – L'un des générateurs  $\gamma_{i_j}$  du groupe fondamental

Soit  $(\mathcal{E}, \nabla)$  un fibré à connexion intégrable sur  $M$  avec pôles logarithmiques en  $\mathcal{D}$  et dont les résidus associés à  $\mathcal{D}^i$  sont  $\pm\theta^i$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Alors la fibre  $E_{a_{i_j}}$  en  $a_{i_j}$  du fibré vectoriel  $\mathcal{E}$  peut être vue comme l'espace des conditions initiales des solutions locales en  $a_{i_j}$ . Nous pouvons alors considérer la droite spéciale  $\tilde{L}_{a_{i_j}}$  dans l'espace vectoriel  $E_{a_{i_j}}$  qui est invariante par la monodromie et qui correspond aux solutions qui sont bornées localement dans un voisinage de  $\mathcal{D}^i$ . Ce choix n'est pas canonique, il dépend du choix d'une base dans l'espace des solutions locales. Fixons alors une solution fondamentale  $S$  au point de base  $a_0$  du groupe fondamental  $\pi_1(M \setminus \mathcal{D}, a_0)$ . En prolongeant cette solution fondamentale le long du chemin  $\delta_{i_j}$ , nous définissons une unique solution fondamentale en  $a_{i_j}$ , c'est-à-dire une unique base de l'espace des solutions locales en  $a_{i_j}$ . Déterminons alors la droite spéciale  $\tilde{L}_{a_{i_j}}$  dans cet espace. Par prolongement analytique le long de  $\delta_{i_j}^{-1}$ , elle définit une droite  $L_{a_{i_j}}$  dans l'espace des solutions locales en  $a_0$  dont la base est donnée par  $S$ .

D'autre part, le prolongement analytique de  $S$  le long de  $\gamma$  avec  $\gamma \in \pi_1(M \setminus \mathcal{D}, a_0)$  définit une nouvelle solution fondamentale  $S^\gamma$  et une représentation  $\rho : \pi_1(M \setminus \mathcal{D}, a_0) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$  telle que  $S^\gamma = \rho^{-1}(\gamma)S$ .

À notre fibré à connexion logarithmique  $(\mathcal{E}, \nabla)$ , nous pouvons alors associer une paire  $(\rho, L)$  qui dépend du choix de la solution initiale  $S$ . Pour un autre choix



$S' = AS$  avec  $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ , nous obtenons la paire  $(A\rho A^{-1}, AL)$ .

**Proposition 2.3 (Correspondance de Riemann-Hilbert modifiée)**

L'application de Riemann-Hilbert  $\widetilde{RH}$  ainsi définie est une bijection entre les ensembles suivants  $(M, \mathcal{D}, \gamma_i, \delta_i$  et  $\theta_i$  comme ci-dessus sont fixés) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{fibrés de rang 2 à} \\ \text{connexion intégrable} \\ \text{sans trace sur } M \\ \text{avec pôles logarith-} \\ \text{miques en } \mathcal{D} \text{ et résidus} \\ \theta^i, -\theta^i \text{ le long de } \mathcal{D}^i \\ \text{pour } i \in \{1, \dots, m\} \end{array} \right\} \xrightarrow[\cong]{\widetilde{RH}} \left\{ \begin{array}{l} \text{paires } (\rho, L), \text{ avec} \\ \rho : \pi_1(M \setminus \mathcal{D}) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbf{C}), \text{ tel} \\ \text{que } \rho(\gamma_i) \text{ a pour valeurs propres} \\ \exp(\pm \theta^i 2i\pi) \text{ pour } i \in \{1, \dots, m\}, \\ \text{et } L = (L_{i_1}, \dots, L_{i_\mu}) \text{ } \mu\text{-uplet de} \\ \text{droites dans } \mathbf{C}^2, \text{ telles que} \\ L_{i_j} \text{ est direction propre de } \rho(\gamma_{i_j}) \\ \text{pour } j \in \{1, \dots, \mu\}. \end{array} \right\} / \sim.$$

Les paires  $(\rho, L)$  sont considérées modulo l'action suivante des éléments  $A$  de  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$  :

$$A \cdot (\rho, L) = (A\rho A^{-1}, AL).$$

**Démonstration :** Ce résultat est bien connu. Comme cette démonstration nous sert de modèle pour la construction de la déformation isomonodromique universelle dans le cas général, nous rappelons ses principaux éléments.

**Injectivité :** Dans le cas non singulier, l'injectivité de l'application  $\widetilde{RH}$  provient du fait que tout fibré à connexion non singulière intégrable est localement trivial :  $dY \equiv 0$ . Ainsi, deux fibrés à connexion non singulière définis sur la même courbe de base  $M \setminus \mathcal{D}$  sont localement isomorphes. Or si deux telles connexions ont même monodromie, tout isomorphisme local s'étend en un isomorphisme global sur  $M \setminus \mathcal{D}$ . Grâce au fait que les connexions considérées sont logarithmiques, on peut montrer que tout isomorphisme sur  $M \setminus \mathcal{D}$  entre deux telles connexions s'étend en un isomorphisme au-dessus des pôles, pourvu que les deux fibrés à connexion aient les mêmes résidus et la même position des droites spéciales.

**Surjectivité :** Au-dessus de l'ensemble non singulier  $M \setminus \mathcal{D}$ , on peut construire par la méthode de *suspension* pour toute représentation de monodromie  $\rho$ , un fibré à connexion non singulière correspondant. À cette fin, on considère le fibré à connexion trivial sur le revêtement universel de  $M \setminus \mathcal{D}$ , et on quotiente par l'action simultanée de  $\rho$  et de  $\pi_1(M \setminus \mathcal{D})$ . Ensuite on construit une connexion singulière sur un petit voisinage de  $\mathcal{D}^i$  correspondant à la monodromie locale associée. Sur l'intersection de leurs bases, le fibré à connexion non singulière et le fibré à connexion singulière ont même monodromie locale, ce qui permet de les recoller,

en respectant la position des droites spéciales.  $\square$

Le long d'une déformation isomonodromique, ni les droites spéciales, ni les résidus ne peuvent changer. Supposons maintenant que le fibré à connexion initial  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  est logarithmique. Il fixe alors une représentation de monodromie, des résidus et des droites spéciales qui doivent être ceux de toute déformation isomonodromique contenant  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$ .

*La correspondance de Riemann-Hilbert montre donc que, dans le cas logarithmique, toute déformation isomonodromique du fibré à connexion initial est déterminée de manière unique par la déformation de la courbe marquée sous-jacente.*

Ainsi, pour un fibré à connexion initial logarithmique, la courbe universelle  $(\mathcal{X}_{\mathcal{T}}, \mathcal{D}_{\mathcal{T}}) = (X_{\tau}, D_{\tau})_{\tau \in \mathcal{T}}$  de Teichmüller doit être la courbe sous-jacente à la déformation isomonodromique universelle. Ici,  $(\mathcal{X}_{\mathcal{T}}, \mathcal{D}_{\mathcal{T}})$  est une famille de courbes marquées avec  $m$  points distingués et  $(X_0, D_0)$  comme courbe initiale. Notons que l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}$  est contractile (cf. [Hub06], page 274). La suite exacte de groupes d'homotopie associée à la fibration  $(\mathcal{X}_{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{D}_{\mathcal{T}}) \rightarrow \mathcal{T}$  permet donc d'identifier  $\pi_1(X_0 \setminus D_0)$  et  $\pi_1(\mathcal{X}_{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{D}_{\mathcal{T}})$ . La correspondance de Riemann-Hilbert modifiée assure l'existence d'un fibré à connexion logarithmique intégrable unique à isomorphisme près, ayant  $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$  comme diviseur de pôles et qui étend le fibré à connexion initial sur  $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ . Ce fibré à connexion définit la déformation isomonodromique universelle de notre fibré à connexion initial logarithmique. Celle-ci induit pour tout paramètre  $\tau$  dans l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}$  l'unique fibré à connexion  $(E_{\tau}, \nabla_{\tau})$  sur  $X_{\tau}$  avec pôles simples en  $D_{\tau}$  qui satisfait à la fois les données de la représentation de monodromie, des résidus et des droites spéciales en les pôles apparents, toutes prescrites par le fibré à connexion initial  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$ .

Étant donné un isomorphisme du fibré à connexion initial, nous voyons grâce à un corollaire de la correspondance de Riemann-Hilbert modifiée que la déformation isomonodromique universelle ainsi définie est en fait unique, à unique isomorphisme près.

La propriété universelle de cette déformation isomonodromique se démontre maintenant très facilement : les applications  $f$  et  $F$  du théorème étant données par la théorie de Teichmüller, il suffit de conclure par la correspondance de Riemann-Hilbert modifiée.

L'espace des paramètres  $T$  de la déformation isomonodromique universelle s'identifie alors dans le cas logarithmique à l'espace de Teichmüller  $\mathcal{T}$  des courbes marquées dont le paramètre initial  $\tau_0$  correspond à  $(X_0, D_0)$ . Par conséquent, sa

dimension est

$$\dim(T) = \begin{cases} 3g - 3 + m & \text{si } g \geq 2 \\ \sup\{m, 1\} & \text{si } g = 1 \\ \sup\{m - 3, 0\} & \text{si } g = 0. \end{cases}$$

### 2.3 Cas général : action de jets de difféomorphismes sur le recollement

Dans le cas des pôles multiples, il existe des déformations isomonodromiques non triviales fixant la courbe et la position initiale des pôles. Plus précisément, la construction analogue à la correspondance de Riemann-Hilbert ne sera plus unique. Néanmoins, nous pouvons affiner cette construction afin d'obtenir la déformation isomonodromique universelle.

Considérons le fibré à connexion non singulière intégrable

$$(\mathcal{E}^*, \nabla^*) \text{ sur } \mathcal{X}_{\mathcal{T}}^* = \mathcal{X}_{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{D}_{\mathcal{T}},$$

construit par la méthode de suspension, qui étend la restriction de  $(E_0, \nabla_0)$  à  $X_0 \setminus D_0$ . Rappelons qu'il est unique à unique isomorphisme près. Dans la courbe universelle de Teichmüller, il existe des voisinages tubulaires germifiés  $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}^i$  des  $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}^i$  avec des coordonnées globales de  $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}^i$ . Ceci nous permet de construire des fibrés à connexion intégrable

$$(\mathcal{E}^i, \nabla^i) \text{ sur } \mathcal{U}_{\mathcal{T}}^i$$

constants, résultant d'un produit avec l'espace  $\mathcal{T}$  de la restriction à  $\mathcal{U}^i \cap X_0$  du fibré à connexion initiale. De plus, à une certaine transformation de coordonnées de la base près,  $(\mathcal{E}^i, \nabla^i)$  est l'unique fibré à connexion (à unique transformation de jauge près), possédant la propriété d'étendre la connexion initiale à  $\mathcal{U}^i$  et qui soit localement constant. Sur l'intersection  $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}^{i*} = \mathcal{U}_{\mathcal{T}}^i \setminus \mathcal{D}_{\mathcal{T}}^i$ , les deux fibrés à connexion  $(\mathcal{E}^*, \nabla^*)$  et  $(\mathcal{E}^i, \nabla^i)$  sont non singuliers et ont même monodromie locale. Selon la correspondance de Riemann-Hilbert, il existe donc un isomorphisme les recollant en un fibré à connexion

$$(\mathcal{E}, \nabla) \text{ sur } \mathcal{X}.$$

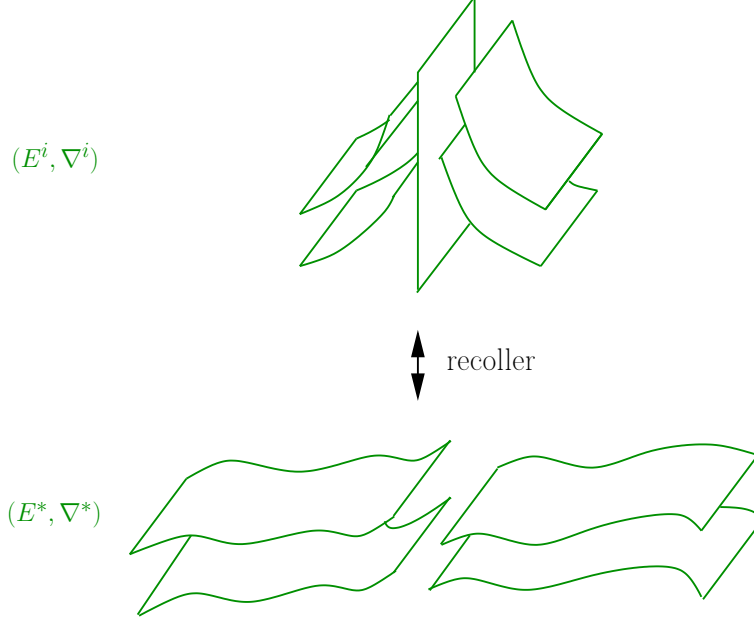


FIG. 2.3 – Recollement entre le germe de fibré à connexion singulière et le fibré à connexion non singulière afin de construire la déformation universelle

Mais contrairement au cas logarithmique, ce recollement n'est pas unique dans le cas général : il dépend du recollement dans la base. En effet, chaque pôle d'ordre  $n_i$  fournit  $n_i - 1$  degrés de liberté dans la construction.

**Lemme 2.4** *En un pôle d'ordre  $n_i$ , le fibré à connexion obtenu par recollement dépend du  $(n_i - 1)$ -jet du difféomorphisme choisi pour recoller la germification du voisinage  $\mathcal{U}_T^i$  et  $\mathcal{X}_T^*$  au-dessus de  $\mathcal{U}_T^{i*}$ .*

**Démonstration :** Un difféomorphisme tangent à l'identité d'ordre  $n_i$  peut être vu comme le flot au temps 1 d'un champ de vecteurs (non autonome) tangent à  $\frac{\partial}{\partial x}$  d'ordre  $n_i$ . Or ces champs de vecteurs peuvent être relevés en des champs de vecteurs holomorphes (non autonomes) tangents à la connexion. Au niveau des flots associés cela signifie que le changement de la matrice de connexion par une transformation de coordonnées tangente d'ordre  $n_i$  à l'identité est égal au changement dû à une certaine transformation de jauge.  $\square$

Par des arguments similaires à la démonstration du lemme ci-dessus, on peut montrer le lemme réciproque suivant.

**Lemme 2.5** *Soit  $\varphi(\tau, x) = (\varphi_\tau(x))_{\tau \in \mathcal{T}}$  une famille de difféomorphismes avec  $\varphi_0 = \text{id}$ . Si le recollement entre les fibrés à connexion  $(\mathcal{E}^i, \nabla^i)$  et  $\varphi^*(\mathcal{E}^*, \nabla^*)$  fournit également le fibré à connexion  $(\mathcal{E}, \nabla)$  (modulo une transformation de jauge), alors pour tout  $\tau \in T$ , le difféomorphisme  $\varphi_\tau$  est tangent d'ordre  $n_i$  à l'identité.*

Dans le cas de pôles multiples, nous rajoutons donc à l'espace de Teichmüller l'espace  $J$  des  $(n_i - 1)$ -jets de difféomorphismes en chaque pôle d'ordre  $n_i$  :

$$J = \prod_{i=1}^m \text{Diff}^{<n_i}(\mathbf{C}, 0).$$

Avec l'espace des paramètres  $T = J \times \mathcal{T}$  et la courbe universelle  $\mathcal{X} = J \times \mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ , nous pouvons alors construire la déformation isomonodromique universelle grâce à la construction de recollement où, pour chaque paramètre dans  $J$ , les bases sont recollées selon le difféomorphisme correspondant à ce paramètre.

*Remarquons que cette déformation universelle est globale par rapport à la déformation dans l'espace de Teichmüller mais aussi par rapport à la déformation par des jets de difféomorphismes.*

En quotientant par l'action d'éventuels automorphismes qui apparaissent pour les cas d'un petit nombre de pôles en genre 0, nous obtenons un espace de paramètres  $T$  de dimension

$$\dim(T) = \begin{cases} \sup(3g - 3 + n, 0) & \text{si } (g, n) \neq (1, 0) \\ 1 & \text{si } (g, n) = (1, 0), \end{cases}$$

où  $n$  est le nombre de pôles comptés avec multiplicité du fibré à connexion initial  $(E_0, \nabla_0)$ .

Pour démontrer la propriété universelle de la déformation isomonodromique universelle dans le cas général, il faut utiliser le fait que les applications  $f$  et  $F$  se factorisent par les applications classifiantes de Teichmüller. Ensuite, on décompose la déformation  $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\nabla})$  en deux parties  $(\tilde{\mathcal{E}}^*, \tilde{\nabla}^*)$  et  $(\tilde{\mathcal{E}}^i, \tilde{\nabla}^i)$ . Nous pouvons redresser  $(\tilde{\mathcal{E}}^i, \tilde{\nabla}^i)$ , afin de le voir comme un produit du fibré à connexion initial avec l'espace des paramètres  $\tilde{T}$ , quitte à appliquer une famille de difféomorphismes pour le recollement entre  $\tilde{\mathcal{U}}^i$  et  $\tilde{\mathcal{X}}$  au-dessus du germe  $\tilde{\mathcal{U}}^{i*}$ . De cette manière, nous pouvons trouver l'image de  $F$  dans l'espace  $J$  des jets.

L'existence d'un isomorphisme avec le pull-back  $F^*(\mathcal{E}, \nabla)$  de la déformation universelle est triviale sur les décompositions respectives de  $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\nabla})$  et de  $F^*(\mathcal{E}, \nabla)$

en partie non singulière et germes de parties singulières. Il suffit de comparer les difféomorphismes dans les recollements respectifs de la base pour finir la démonstration de la propriété universelle.

De telles constructions de déformations isomonodromiques universelles ont été développées dans le cas non résonant et en rang quelconque dans [Mal04], [Mal83b] et [Pal99] pour le genre 0, et dans [Kri02] pour le genre quelconque. Les auteurs y utilisent la forme normale de Birkhoff et les matrices de Stokes. Notre approche ne contient pas d'analyse de Stokes et est en ce sens plus élémentaire. De plus, notre construction ne nécessite pas de condition de non résonance sur le fibré à connexion initial. Notre approche englobe ainsi la construction locale, c'est-à-dire la construction d'un germe de déformation isomonodromique universelle due à B. Malgrange (*cf.* [Mal86], et [Mal96]) pour des singularités dont la partie la plus polaire de la matrice de connexion ne possède qu'un seul bloc de Jordan par valeur propre. Remarquons que même dans le cas de genre quelconque, la construction locale de déformations isomonodromiques de fibrés à connexion avec singularités irrégulières développée par B. Malgrange peut être appliquée localement dans la courbe de base. Elle se complète sans difficulté par des recollements adaptés sur la courbe de Teichmüller en une construction qui est locale en l'espace des paramètres.

Une autre approche possible pour la construction de la déformation isomonodromique universelle est la méthode de Kodaira-Spencer. Le résultat principal dans [MN94] assure l'existence d'un espace de Kuranishi local, qui s'identifie à un germe de notre espace de paramètres  $T$ .

Les deux approches classiques citées sont des constructions locales. Nous apportons la nouveauté d'une construction globale.

## Chapitre 3

# Une version analytique du résultat de semi-continuité de Maruyama

Dans ce chapitre, nous démontrons la semi-continuité du nombre d'auto-intersection minimal des sections le long d'une famille analytique de fibrés en  $\mathbf{P}^1$  sur des surfaces de Riemann compactes. Dans l'étude des déformations isomonodromiques des fibrés à connexion de rang 2, de telles familles de fibrés en  $\mathbf{P}^1$  apparaissent naturellement. En projectivant la famille  $(E_t \rightarrow X_t)_{t \in T}$  de fibrés vectoriels de rang 2 sous-jacents à une déformation isomonodromique, nous obtenons une famille analytique  $(\mathbf{P}(E_t) \rightarrow X_t)_{t \in T}$  de fibrés en  $\mathbf{P}^1$ . Le théorème 3.1, ainsi que le corollaire 3.15 sont des résultats préliminaires pour la démonstration du théorème principal de cette thèse.

### 3.1 Nombre d'auto-intersection minimal des sections

Rappelons brièvement l'interprétation géométrique du nombre d'auto-intersection. Soit  $\sigma$  une section holomorphe d'un fibré  $P \rightarrow X$  en  $\mathbf{P}^1$  sur une surface de Riemann compacte  $X$ , et notons  $\sigma_\varepsilon$  une section  $\mathcal{C}^\infty$  différente de  $\sigma$ . Nous notons  $\sigma_\varepsilon \cdot \sigma$  le nombre d'intersections entre  $\sigma_\varepsilon$  et  $\sigma$ , comptées avec signes et multiplicités. Le nombre  $\sigma_\varepsilon \cdot \sigma$  est constant pour tout  $\sigma_\varepsilon$  inclus dans un voisinage suffisamment petit de  $\sigma$ , et on définit le nombre d'auto-intersection de  $\sigma$  par

$$\sigma \cdot \sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sigma_\varepsilon \cdot \sigma.$$

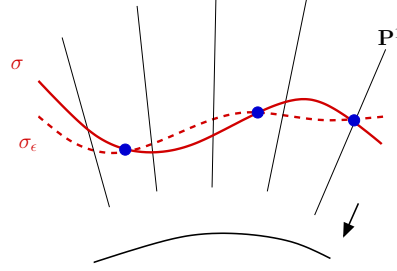


FIG. 3.1 – Interprétation géométrique du nombre d'auto-intersection

Cela implique par exemple que le nombre d'auto-intersection d'une section constante du fibré trivial  $X \times \mathbf{P}^1$  est zéro.

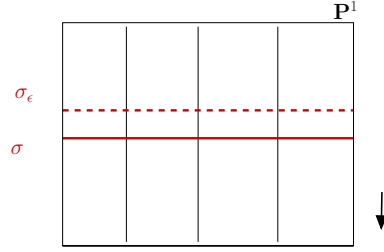


FIG. 3.2 – Exemple d'une section avec nombre d'auto-intersection zéro

Le nombre d'intersections de deux sections holomorphes est toujours positif ou nul. Pourtant, le nombre d'auto-intersection d'une section  $\sigma$  peut être négatif si cette section ne se déforme pas en une section holomorphe proche  $\sigma_\epsilon$ . Cependant, si un fibré en  $\mathbf{P}^1$  sur une surface de Riemann possède une section dont le nombre d'auto-intersection est négatif, celle-ci est unique (*cf.* [GM89], page 180). Le nombre  $\kappa(P)$  d'auto-intersection minimal des sections d'un fibré  $P \rightarrow X$  en  $\mathbf{P}^1$  est alors bien défini :

$$\kappa(P) = \min\{\sigma \cdot \sigma \mid \sigma : X \rightarrow P \text{ section}\}.$$

Le nombre d'auto-intersection minimal des sections du fibré  $P \rightarrow X$  est pair, s'il existe un fibré vectoriel  $E \rightarrow X$  de rang 2 et de degré 0 tel que  $\mathbf{P}(E) = P$ , et impair sinon. Le long d'une famille continue  $(P_t \rightarrow X_t)_{t \in T}$ , la *parité* du nombre d'auto-intersection minimal  $\kappa(P_t)$  est invariante.



## 3.2 Résultat

Soit  $E \rightarrow X$  un fibré vectoriel de rang 2 sur une surface de Riemann  $X$ . Alors le nombre d'auto-intersection minimal des sections du fibré projectivisé  $\mathbf{P}(E) \rightarrow X$  est appelé le degré de stabilité du fibré  $E$ . Il sera étudié dans le chapitre 4. C'est en termes de degré de stabilité que le résultat suivant représente une version analytique du résultat de semi-continuité de M. Maruyama (cf. [Mar76]).

**Théorème 3.1** *Soit  $(P_t \rightarrow X_t)_{t \in T}$  une famille analytique de fibrés en  $\mathbf{P}^1$  sur des surfaces de Riemann de genre  $g$ . L'application*

$$\begin{aligned} T &\rightarrow \mathbf{Z} \\ t &\mapsto \kappa(P_t), \end{aligned}$$

*où  $\kappa(P_t)$  est le nombre d'auto-intersection minimal de sections du fibré  $P_t$  associé au paramètre  $t$ , est semi-continue inférieurement. Plus précisément, pour tout entier  $k$  l'ensemble*

$$T_k = \{t \in T \mid \kappa(P_t) \leq k\}$$

*est un sous-ensemble analytique fermé de  $T$ .*

Notons que pour deux entiers  $k$  et  $k'$  avec  $k < k'$  nous avons  $T_k \subset T_{k'}$ . D'après un théorème de Nagata (cf. [Nag70], page 1), le nombre d'auto-intersection minimal ne peut pas être strictement supérieur à  $g$ . Par conséquent,  $T_g = T$ , et nous obtenons une filtration croissante de l'espace des paramètres  $T$  par des sous-ensembles analytiques fermés  $T_k$

$$\dots T_{g-3} \subset T_{g-2} \subset T_{g-1} \subset T_g = T.$$

Nous cherchons à démontrer que  $T_k$  est un sous-ensemble analytique fermé de  $T$ , ce qui est une propriété locale dans  $T$ . Dans la suite de ce chapitre, nous allons donc considérer une famille analytique  $(P_t \rightarrow X_t)_{t \in T}$  de fibrés en  $\mathbf{P}^1$  sur des surfaces de Riemann compactes, dont l'espace des paramètres  $T$  est un germe d'ouvert dans une variété complexe (lisse).

## 3.3 Rappels sur les familles analytiques de fibrés paramétrés par un germe

### 3.3.1 Familles de surfaces de Riemann paramétrées par un germe

Rappelons quelques propriétés générales des familles de surfaces de Riemann compactes qui sont paramétrées par un germe. Une telle famille est donnée par

une submersion propre  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow T$  telle que chaque fibre  $\pi^{-1}(t)$  avec  $t \in T$  est une surface de Riemann compacte  $X_t$ . Ici  $(T, t_0)$  est un germe d'ouvert de variété complexe (lisse). L'espace total  $\mathcal{X}$  possède alors un atlas de cartes de la forme  $T \times U$  avec des coordonnées  $(t, x)$ , tel que les applications de transition sont de la forme  $(t, x) \mapsto (t, \varphi(t, x))$ . Par conséquent, il existe des sections  $T \rightarrow \mathcal{X}$  transverses à la fibration en courbes.

Dans la suite de ce chapitre,  $\mathcal{X} \rightarrow T$ , mais également  $(X_t)_{t \in T}$  désignent une famille analytique de surfaces de Riemann compactes, dont on notera  $g$  le genre, telle que  $(T, t_0)$  est un germe de variété complexe lisse.

D'après le théorème de Ehresmann (cf. [Voi02], page 209), il existe un difféomorphisme  $\varpi : \mathcal{X} \rightarrow X_{t_0} \times T$  qui commute avec la projection sur  $T$  tel que  $\varpi|_{X_{t_0}} = \text{id}$ . Autrement dit,  $\mathcal{X} \rightarrow T$  peut être vu comme le produit  $X_{t_0} \times T$  de variétés  $\mathcal{C}^\infty$ , tel que  $X_{t_0}$  est muni d'une structure complexe qui varie de manière holomorphe en fonction du paramètre  $t \in T$ .

**Proposition 3.2** *Il existe une application holomorphe  $i : \mathcal{X} \rightarrow T \times \mathbf{P}^{g+1}$ , qui commute avec la projection sur  $T$  et telle que pour tout  $t \in T$  la restriction  $i_t : X_t \rightarrow \mathbf{P}^{g+1}$  à la courbe  $X_t$  est une immersion fermée.*

**Démonstration :** Cette propriété est bien connue. Comme nous n'avons pas trouvé de référence précise, nous rappelons ici les éléments de la preuve.

Quitte à restreindre l'espace des paramètres  $T$ , il existe une section  $s : T \rightarrow \mathcal{X}$  de la fibration en courbes. Cette section définit un diviseur  $\mathcal{D} = (D_t)_{t \in T}$  sur  $\mathcal{X}$ . Pour un entier  $d$ , considérons le diviseur  $d\mathcal{D}$ , qui est de degré  $d$  en restriction à  $X_t$  pour tout  $t \in T$ . Fixons dans un premier temps un paramètre  $t \in T$ . Or pour  $d \geq 2g + 1$ , le diviseur  $dD_t$  sur  $X_t$  est très ample (cf. [Har77], page 308). Cela signifie que ce diviseur définit une immersion fermée de  $X_t$  dans  $\mathbf{P}^{d-g}$  (cf. [Har77], page 120). Choisissons  $d = 2g + 1$  et regardons cette construction en détail pour vérifier ensuite qu'elle s'étend à  $\mathcal{X}$ . Le théorème de Riemann-Roch implique que pour tout diviseur  $D'$  sur  $X_t$  de degré  $\deg(D') \geq 2g - 1$ , l'espace vectoriel des sections globales est de dimension  $\dim(H^0(X_t, \mathcal{O}_{D'})) = \deg(D') + 1 - g$ . En particulier, l'espace vectoriel  $V_t = H^0(X_t, \mathcal{O}_{dD_t})$  est de dimension  $d + 1 - g$ . Notons  $L_t$  le fibré en droites sur  $X_t$  défini par le diviseur  $dD_t$ . Soit  $x$  un point dans  $X_t$ . Étant donné une trivialisatoin locale de  $L_t$ , tout élément de  $V_t$  peut être évalué en  $x$ . Nous définissons une application  $V_t \rightarrow \mathbf{C}$ . Cette application n'est pas nulle, car un diviseur de degré supérieur ou égal à  $2g$  ne peut pas avoir de point base (cf. [Har77], page 308). Si nous choisissons une autre trivialisatoin locale de  $L_t$ , tous les complexes associés aux éléments de  $V_t$  sont multipliés par un même scalaire non nul. Nous avons ainsi défini une application  $i_t : X_t \rightarrow \mathbf{P}(V_t^\vee) \cong \mathbf{P}^{d-g}(\mathbf{C})$ . De

plus, cette application est une immersion fermée (cf. [Har77], page 150). Or le fait que la dimension de  $V_t$  ne dépende pas du paramètre  $t$ , et que notre espace des paramètres soit réduit et germifié, implique que l'espace vectoriel  $\mathcal{V} = H^0(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{d\mathcal{D}})$  est également de dimension  $d + 1 - g$ , et  $V_t$  s'obtient à partir de  $\mathcal{V}$  par restriction au paramètre  $t$  (cf. [Gra60], page 291). Ainsi la construction ci-dessus s'étend à  $i : \mathcal{X} \rightarrow T \times \mathbf{P}(V^\vee) \cong \mathbf{P}^{g+1}$ .  $\square$

Pour tout paramètre  $t \in T$ , nous pouvons alors voir  $X_t$  comme une courbe algébrique lisse dans  $\mathbf{P}^{g+1}$ , telle que l'immersion  $i_t : X_t \rightarrow \mathbf{P}^{g+1}$  dépend holomorphiquement de  $t$ . De ce point de vue, nous disons que  $\mathcal{X}$  est une courbe algébrique lisse à paramètre.

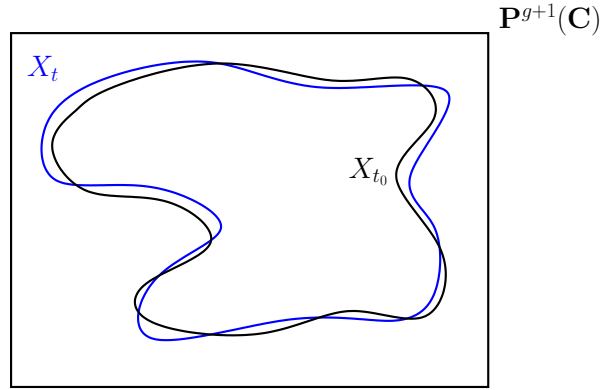


FIG. 3.3 – Une famille de courbes plongées dans  $\mathbf{P}^{g+1}$

### 3.3.2 Relever un fibré en $\mathbf{P}^1$ en un fibré vectoriel

Comme nous nous intéressons aux déformations isomonodromiques de fibrés à connexion de rang 2, les résultats de ce chapitre ont été étudiés du point de vue des fibrés en  $\mathbf{P}^1$  qui apparaissent comme projectivisation de familles de fibrés vectoriels de rang 2. Or toute famille de fibrés en  $\mathbf{P}^1$  paramétrée par un germe peut être vue de cette manière :

**Proposition 3.3** *Soit  $\mathcal{P} \in H^1(\mathcal{X}, \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}))$  un fibré en  $\mathbf{P}^1$  sur  $\mathcal{X} \rightarrow T$ . Il existe un fibré vectoriel  $\mathcal{E}$  de rang 2 sur  $\mathcal{X}$  tel que  $\mathcal{P} = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ . Si  $\mathcal{E}'$  est un autre fibré vectoriel de rang 2 sur  $\mathcal{X}$  avec cette propriété, alors il existe un fibré en droites  $\mathcal{L}$  sur  $\mathcal{X}$  tel que  $\mathcal{E}' = \mathcal{L} \otimes \mathcal{E}$ .*

**Démonstration :** Considérons la suite exacte courte de faisceaux de groupes non abéliens

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^* \longrightarrow \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \xrightarrow{p} \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \longrightarrow 1,$$

construite par les applications canoniques. Elle induit une suite exacte d'ensembles de cohomologie contenant la suite exacte suivante :

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}^*) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathcal{X}, \mathrm{GL}(2, \mathcal{O})) \xrightarrow{p^*} \mathrm{H}^1(\mathcal{X}, \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O})) \xrightarrow{\delta^*} \mathrm{H}^2(\mathcal{X}, \mathcal{O}^*). \quad (3.1)$$

Nous cherchons à montrer la surjectivité de l'application  $p^*$  de  $\mathrm{H}^1(\mathcal{X}, \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}))$  dans  $\mathrm{H}^1(\mathcal{X}, \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}))$ . Pour cela, il suffit de montrer que l'image de l'application  $\delta^*$  de  $\mathrm{H}^1(\mathcal{X}, \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}))$  dans  $\mathrm{H}^2(\mathcal{X}, \mathcal{O}^*)$  est triviale :

$$\mathrm{im}(\delta^*) = \{1\}.$$

Soit  $(\phi_{\alpha\beta})$  un élément de  $\mathrm{H}^1(\mathcal{X}, \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}))$ , donné par rapport à un certain recouvrement  $(U_{\alpha})$  de  $\mathcal{X}$ . Quitte à prendre un recouvrement plus fin, nous pouvons supposer que  $(U_{\alpha})$  est un bon recouvrement, au sens où toute intersection non vide  $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$  de deux éléments de  $(U_{\alpha})$  est simplement connexe (cf. [BT82], pages 42-43). Rappelons la construction de l'image de  $(\phi_{\alpha\beta})$  sous l'application  $\delta^*$ . Choisissons des matrices  $A_{\alpha\beta} \in \mathrm{GL}(2, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}))$  dont la classe d'équivalence dans  $\mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}))$  est celle de  $\phi_{\alpha\beta}$ . La condition de cocycle  $\phi_{\alpha\beta}\phi_{\beta\gamma}\phi_{\alpha\gamma}^{-1} = I$  sur  $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma}$  implique qu'il existe un élément  $f_{\alpha\beta\gamma}$  de  $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^*(U_{\alpha} \cap U_{\beta} \cap U_{\gamma})$  tel que  $A_{\alpha\beta}A_{\beta\gamma}A_{\alpha\gamma}^{-1} = f_{\alpha\beta\gamma}I$ . Par construction, nous avons alors

$$\delta^*(\phi_{\alpha\beta}) = (f_{\alpha\beta\gamma}).$$

Comme les intersections  $U_{\alpha} \cap U_{\beta}$  ici sont simplement connexes, nous pouvons choisir les matrices  $A_{\alpha\beta}$  ci-dessus de manière à ce qu'elle soient toutes de déterminant 1. Il y a alors des cocycles de fonctions à valeurs dans  $\{-1, 1\}$  dans la classe d'équivalence de  $(f_{\alpha\beta\gamma})$ .

Considérons la suite exacte de Kummer suivante :

$$1 \longrightarrow \{-1, 1\} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^* \xrightarrow{q} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^* \longrightarrow 1,$$

où  $q$  désigne l'élévation au carré. Nous allons nous intéresser à la sous-suite exacte suivante de la suite exacte longue associée :

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{d^*} \mathrm{H}^2(\mathcal{X}, \{-1, 1\}) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^2(\mathcal{X}, \mathcal{O}^*).$$

D'après ce qui précède, tout élément de l'image de l'application  $\delta^*$  provient d'un élément de  $H^2(\mathcal{X}, \{-1, 1\})$  pour l'application canonique  $i^*$  de  $H^2(\mathcal{X}, \{-1, 1\})$  dans  $H^2(\mathcal{X}, \mathcal{O}^*)$  :

$$\text{Im}(\delta^*) \subset \text{Im}(i^*).$$

Nous allons montrer que l'application  $d^*$  de  $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}^*)$  dans  $H^2(\mathcal{X}, \{-1, 1\})$  est surjective. Ceci permettra de conclure, car dans ce cas

$$\text{Im}(i^*) = \{1\}.$$

Rappelons-nous que notre espace de paramètres  $(T, t_0)$  est un germe. Selon le théorème de Ehresmann, la courbe initiale  $X_{t_0}$  est une rétraction par déformation de  $\mathcal{X}$ . En particulier, la restriction  $r$  au paramètre  $t_0$  induit un isomorphisme entre les groupes de cohomologie suivants :

$$H^2(\mathcal{X}, \{-1, 1\}) \simeq H^2(X_{t_0}, \{-1, 1\}).$$

Soit  $d_0^*$  l'application de  $H^1(X_{t_0}, \mathcal{O}^*)$  dans  $H^1(X_{t_0}, \{-1, 1\})$  induite par la suite exacte de Kummer sur la courbe  $X_{t_0}$ . Alors la restriction  $r'$  au paramètre  $t_0$  du groupe de cohomologie  $H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}^*)$  dans le groupe de cohomologie  $H^1(X_{t_0}, \mathcal{O}^*)$  fait commuter le diagramme suivant (cf. [Kod86], page 133) :

$$\begin{array}{ccc} H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{d^*} & H^2(\mathcal{X}, \{-1, 1\}) \\ \downarrow r' & & \downarrow r \simeq \\ H^1(X_{t_0}, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{d_0^*} & H^2(X_{t_0}, \{-1, 1\}) \simeq \{-1, 1\}. \end{array}$$

Comme  $T$  est un germe, nous pouvons choisir une section  $\mathcal{D} : T \rightarrow \mathcal{X}$ . Le diviseur associé sur  $\mathcal{X}$  sera également notée  $\mathcal{D}$ . Notons  $D_{t_0}$  le diviseur induit sur la courbe initiale  $X_{t_0}$ . Or l'application  $d_0^*$  se factorise par la première classe de Chern (par définition) :

$$\begin{array}{ccc} & H^2(X_{t_0}, \mathbf{Z}) & \\ c_1 \nearrow & & \searrow \exp(i\pi \cdot) \\ H^1(X_{t_0}, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{d_0^*} & H^2(X_{t_0}, \{-1, 1\}). \end{array}$$

Via les isomorphismes canoniques  $H^2(X_{t_0}, \{-1, 1\}) \simeq \{-1, 1\}$ , et  $H^2(X_{t_0}, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}$ , les applications  $c_1$  et  $d_0^*$  envoient le fibré en droites associé à  $nD_{t_0}$  respectivement sur  $n$  et  $e^{i\pi n}$ . Comme  $r'(\mathcal{D}) = D_{t_0}$ , l'application  $d_0^* \circ r'$  est surjective : les

$$H^1(\mathcal{X}, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(\mathcal{X}, \mathrm{GL}(2, \mathcal{O})) \xrightarrow{p^*} H^1(\mathcal{X}, \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O})) \xrightarrow{\delta^*} 1$$

**Remarque 3.4** *La preuve ci-dessus se généralise et on peut démontrer que tout fibré en  $\mathbf{P}^r$  sur  $\mathcal{X}$ , avec  $r \geq 1$  provient d'un fibré vectoriel de rang  $r + 1$  sur  $\mathcal{X}$ . Pour cela on utilise la suite exacte de Kummer suivante :*

$$1 \longrightarrow U_{r+1} \xrightarrow{i} \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^* \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^* \longrightarrow 1$$

$$f \longmapsto f^{r+1}$$

**Remarque 3.5** *Pour démontrer que tout fibré en  $\mathbf{P}^1$  sur une surface de Riemann  $X$  provient d'un fibré vectoriel de rang 2 il suffit de considérer la suite exacte*

$$H^1(X, \mathcal{O}^*) \longrightarrow H^1(X, GL(2, \mathcal{O})) \longrightarrow H^1(X, PGL(2, \mathcal{O})) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}^*)$$

et d'utiliser le fait que  $H^2(X, \mathcal{O}^*) = 1$  (cf. [Fri98], page 120). Or  $H^2(\mathcal{X}, \mathcal{O}^*)$  n'est pas trivial a priori le long d'une famille de surfaces de Riemann  $\mathcal{X} \rightarrow T$ .

### 3.3.3 Rappel d'un théorème de Grauert-Remmert

Soit  $\mathcal{P} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{X}, \mathrm{PGL}(2, \mathcal{O}))$  un fibré en  $\mathbf{P}^1$  sur  $\mathcal{X} \rightarrow T$ . Il existe un fibré vectoriel  $\mathcal{E}$  de rang 2 sur  $\mathcal{X}$  tel que  $\mathcal{P} = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ . L'application  $i : \mathcal{X} \rightarrow T \times \mathbf{P}^{g+1}$  construite dans la proposition 3.2 nous permet d'appliquer le théorème III de H. Grauert et R. Remmert dans [GR58], page 425 au fibré vectoriel  $\mathcal{E}$  à paramètre. Nous obtenons

**Théorème 3.6 (Application d'un théorème de H. Grauert et R. Remmert)** *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$  un fibré vectoriel de rang 2 sur  $\mathcal{X} \rightarrow T$ . Soit  $\mathcal{L}$  le fibré en droites sur la courbe à paramètre  $\mathcal{X}$  associé au diviseur  $\mathcal{D}$  dans la démonstration de la proposition 3.2. Alors le fibré vectoriel  $\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{E}$  est engendré par ses sections globales holomorphes dès que  $n$  est suffisamment grand.*

Ce résultat est une conséquence immédiate des théorèmes I et II de H. Grauert et R. Remmert, démontrés dans [GR58]. Ces résultats généralisent les théorèmes A et B de H. Cartan.

Partant d'un fibré  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$  en  $\mathbf{P}^1$  sur  $\mathcal{X} \rightarrow T$ , il existe un fibré vectoriel  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$  de rang 2 sur  $\mathcal{X} \rightarrow T$ . Or pour tout fibré en droites  $\mathcal{L}$  sur la courbe à paramètre  $\mathcal{X}$ , nous avons  $\mathbf{P}(\mathcal{L}^{\otimes n} \otimes \mathcal{E}) = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ . D'après le théorème ci-dessus nous pouvons désormais supposer que le relevé  $\mathcal{E}$  est engendré par ses sections globales holomorphes. Il est clair qu'il suffit d'un nombre fini de ces sections pour engendrer le fibré  $\mathcal{E}$ , puisque la courbe initiale  $X_0$  est compacte et l'espace des paramètres  $T$  est un germe.

### 3.3.4 Comportement des projectivisés des sections sur le fibré vectoriel

**Proposition 3.7** *Soit  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$  un fibré en  $\mathbf{P}^1$  sur  $\mathcal{X} \rightarrow T$ . Alors  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$  est engendré par un nombre fini de ses sections globales holomorphes.*

Soit  $\mathcal{E}$  un fibré vectoriel de rang 2 sur  $\mathcal{X} \rightarrow T$  qui vérifie  $\mathcal{P} = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ . Considérons une section holomorphe  $s : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{E}$  de ce fibré. Dans une trivialisation locale  $T \times U \times \mathbf{C}^2$  avec coordonnées  $(t, x, (\frac{y_1}{y_2}))$ , la section  $s$  est donnée par  $s(t, x) = \begin{pmatrix} s^1(t, x) \\ s^2(t, x) \end{pmatrix}$ . Dans les coordonnées  $(t, x, y)$  (avec  $y = \frac{y_2}{y_1}$ ) du projectivisé  $T \times U \times \mathbf{P}^1$ , considérons  $\mathbf{P}(s(x, t)) = \frac{s^1(t, x)}{s^2(t, x)}$ . Alors le projectivisé de  $s$  définit une section holomorphe du fibré  $\mathcal{P}$  si et seulement si la fraction  $\frac{s^1(t, x)}{s^2(t, x)}$  ne possède pas de point d'indétermination après simplification éventuelle. Autrement, nous parlons de section *singulière*.

**Exemple 3.8** *Soit  $s$  la section locale  $s(x, t) = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$  sur  $T \times U \times \mathbf{C}^2$ . Alors, en restriction au paramètre  $t = 0$ ,  $s$  induit une section constante sur  $U \times \mathbf{P}^1$ . Par contre, en restriction à un paramètre non nul,  $\frac{t}{x}$  possède un pôle en  $\{x = 0\}$ .*

*Si  $t$  tend vers 0, l'adhérence du graphe de ces sections est une section constante avec une «droite verticale» en  $\{x = 0\}$ . D'autre part, ce phénomène de droite verticale non générique disparaît lorsque nous considérons la section perturbée  $\tilde{s}(x, t) = \begin{pmatrix} t+\varepsilon \\ x \end{pmatrix}$ . Le projectivisé de  $\tilde{s}$  définit une section holomorphe.*

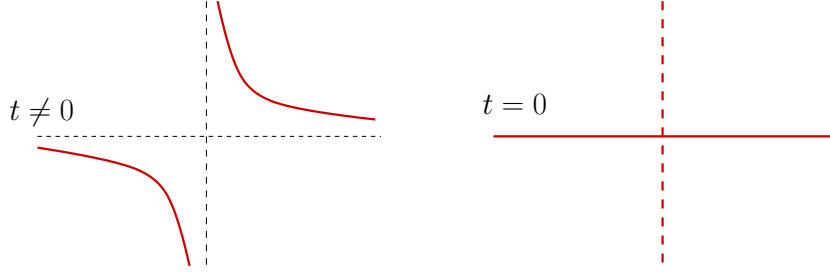
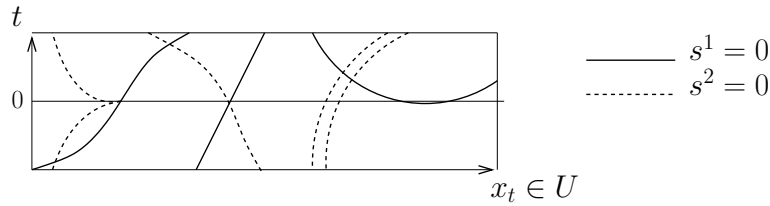


FIG. 3.4 – Variation possible des sections avec le paramètre

**Lemme 3.9** *Soit  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$  un fibré vectoriel de rang 2 sur  $\mathcal{X} \rightarrow T$  qui est engendré par ses sections globales holomorphes. Soit  $s$  une section holomorphe globale de  $\mathcal{E}$ . Alors il existe une section holomorphe globale  $s'$  de  $\mathcal{E}$  telle que pour tout  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit, la section holomorphe globale  $s + \varepsilon s'$  ne s'annule pas sur  $\mathcal{E}$ . En particulier, la section  $s + \varepsilon s'$  définit une section holomorphe sur  $\mathcal{P} = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ .*

**Démonstration :** Nous considérons l'ensemble des zéros de la section  $s$ . Comme l'espace des paramètres est un germe, il suffit de considérer les zéros sur la courbe  $X_{t_0}$  associée au paramètre initial  $t_0$ .

FIG. 3.5 – Lieu des zéros des deux coordonnées d'une section  $s$ 

Soit  $s_1, \dots, s_n$  un système générateur de sections globales holomorphes du fibré  $\mathcal{E}$ . Considérons maintenant la famille  $s + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i s_i$  de sections de  $\mathcal{E}$ , avec  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mathbf{C}^n$ . Pour tout  $\varepsilon$  dans  $\mathbf{C}^n$ , notons  $\text{Zéro}(s + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i s_i)$  l'ensemble des zéros sur  $X_{t_0}$  de la section associée  $s + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i s_i$ . Montrons que l'ensemble  $Z = (\text{Zéro}(s + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i s_i), \varepsilon)_{\varepsilon \in \mathbf{C}^n}$ , qui est un ensemble algébrique dans  $X_{t_0} \times \mathbf{C}^n$ , est de codimension au moins 2. Premièrement, nous pouvons supposer que l'ensemble des zéros de la section  $s$ , qui est associée au paramètre  $\varepsilon = 0$  n'est pas la courbe initiale  $X_{t_0}$  toute entière. Autrement, il existe une section  $s'$  parmi les



sections génératrices telle que la section perturbée  $s + \varepsilon' s'$  possède cette propriété, et nous considérons désormais cette section à la place de  $s$ . L'ensemble  $Z$  est alors de codimension 1 en restriction à  $\varepsilon = 0$ . Deuxièmement, considérons un zéro  $p$  de  $s$  sur  $X_{t_0}$ . Il existe au moins une section parmi les  $s_i$  pour  $i \in \{1, \dots, n\}$  qui ne s'annule pas dans un petit voisinage de  $p$  sur  $X_{t_0}$  et qui est holomorphiquement indépendante de  $s$  sur ce voisinage. Il existe alors un voisinage  $V$  de  $p$ , tel que la section  $s + \varepsilon_i s_i$  avec  $\varepsilon_i \in \mathbf{C}$  possède un zéro sur  $V$  si et seulement si  $\varepsilon_i = 0$ . En restriction à l'ensemble des points  $(x, \varepsilon_i)$  dans  $V \times \mathbf{C}$ , l'ensemble  $Z$  est alors de codimension au moins 2. Cet argument local montre que  $Z$  est de codimension au moins 2 dans  $X_{t_0} \times \mathbf{C}^n$ . Or la projection naturelle  $\pi : X_{t_0} \times \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$  est propre, puisque ses fibres sont compactes. Il s'ensuit que  $\pi(Z)$  est un ensemble algébrique de codimension au moins 1 dans  $\mathbf{C}^n$  (cf. [Mum88], pages 54-57). Le complémentaire  $\mathbf{C}^n \setminus \pi(Z)$  est alors Zariski-dense. Cela signifie que pour tout  $\varepsilon \in \mathbf{C}^n$  générique, la section perturbée  $s + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i s_i$  ne possède pas de zéro (et donc pas de point d'indétermination) sur  $X_{t_0}$ . L'assertion du lemme ci-dessus en découle.  $\square$

Choisissons un ensemble fini de sections globales holomorphes de  $\mathcal{E}$  qui engendrent le fibré. Si nous perturbons l'une de ces sections, nous obtenons de nouveau un système générateur de sections globales de  $\mathcal{E}$ . D'après le lemme précédent, nous pouvons alors choisir un système générateur de sections globales de  $\mathcal{E}$  qui descendent en des sections holomorphes de  $\mathcal{P}$ . Ceci termine la démonstration de la proposition 3.7.

### 3.4 Démonstration du résultat de semi-continuité

Soit  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$  un fibré en  $\mathbf{P}^1$  sur une famille analytique de surfaces de Riemann compactes  $\mathcal{X} \rightarrow T$  paramétrée par un germe  $(T, t_0)$ .

#### 3.4.1 Existence de trois sections en position générale

**Proposition 3.10** *Nous pouvons choisir trois sections holomorphes  $\sigma_0, \sigma_1$  et  $\sigma_\infty$  de  $\mathcal{P}$  qui sont en «position générale», c'est-à-dire de sorte que*

$$\begin{cases} \sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty \text{ sont deux à deux transverses} \\ \sigma_0 \cap \sigma_1 \cap \sigma_\infty = \emptyset. \end{cases}$$

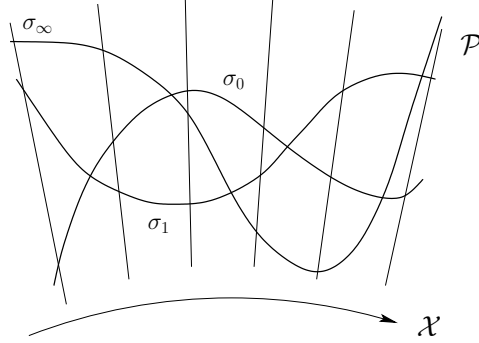


FIG. 3.6 – Trois sections en position générale

**Démonstration :** Comme précédemment, notons  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$  un fibré vectoriel de rang 2, engendré par ses sections globales holomorphes, tel que  $\mathbf{P}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}$ . Choisissons trois sections globales distinctes  $s_0, s_1, s_\infty$  du fibré  $\mathcal{E}$ . Quitte à perturber un peu ces sections, elles définissent des sections holomorphes  $\sigma_0, \sigma_1$  et  $\sigma_\infty$  de  $\mathcal{P}$ . Supposons  $\sigma_0 \cap \sigma_1 \cap \sigma_\infty \neq \emptyset$ , c'est-à-dire pour une trivialisatation locale  $T \times U \times \mathbf{P}^1$  de  $\mathcal{P}$  il existe un élément  $y \in \mathbf{P}^1$  tel que

$$\sigma_0(t_0, x) = \sigma_1(t_0, x) = \sigma_\infty(t_0, x) = y$$

pour  $x = 0$  dans  $U$ . C'est le cas si et seulement si les sections  $s_0, s_1$  et  $s_\infty$  dans la carte  $T \times U \times \mathbf{C}^2$  de  $\mathcal{E}$  sont colinéaires en  $x = 0$  pour le paramètre initial. Autrement dit, les déterminants

$$\det(s_0, s_1), \det(s_1, s_\infty), \det(s_0, s_\infty) \quad (3.2)$$

s'annulent simultanément en  $x = 0$  pour le paramètre initial. Soit  $s$  une section de  $\mathcal{E}$  qui n'est pas colinéaire à  $s_\infty$  en  $x = 0$ . En perturbant  $s_0$  en  $s_0 + \varepsilon s$ , le nombre de points d'annulation simultanée de (3.2) diminue. Pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, la nouvelle section  $s_0$  définit une nouvelle section holomorphe  $\sigma_0$  de  $\mathcal{P}$ . Nous pouvons alors trouver trois sections  $s_0, s_1, s_\infty$  de  $\mathcal{E}$  qui définissent des sections holomorphes de  $\mathcal{P}$  telles qu'en tout point, les déterminants de (3.2) ne s'annulent pas simultanément.

Supposons maintenant que les sections  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  sont non transverses au paramètre initial en un point d'intersection  $x = 0$  dans une carte  $U$ . En termes de déterminants, la tangence des sections  $s_0$  et  $s_1$  correspond à un zéro d'ordre  $n \geq 2$  de

$$\det(s_0, s_1),$$

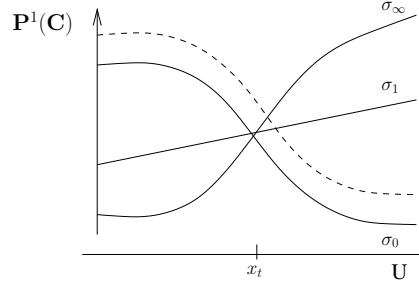


FIG. 3.7 – Position non générale : intersection en un point commun

et la transversalité correspond à un zéro simple. D'après ce qui précède, la section  $\sigma_\infty$  possède une valeur distincte de celle de  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  en  $x = 0$ . Autrement dit, les déterminants  $\det(s_0, s_\infty)$  et  $\det(s_1, s_\infty)$  ne s'annulent pas en  $x = 0$ . Nous avons

$$\det(s_1 + \varepsilon s_\infty, s_0) = \varepsilon + x^n(\dots).$$

Pour  $\varepsilon \neq 0$  suffisamment petit, la fonction  $\det(s_1 + \varepsilon s_\infty, s_0)$  possède alors  $n$  zéros simples sur  $\mathcal{U}$ . En perturbant  $s_1$  en  $s_1 + \varepsilon s_\infty$ , le nombre de points de tangence diminue, et l'intersection  $\sigma_0 \cap \sigma_1 \cap \sigma_\infty$  reste vide. Nous pouvons alors trouver trois sections en position générale.

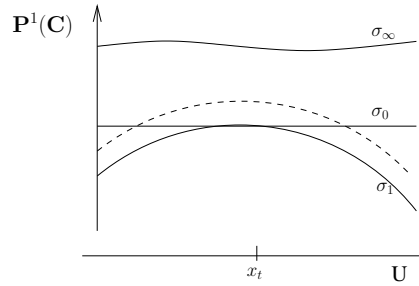


FIG. 3.8 – Position non générale : deux sections sont tangentes

□

### 3.4.2 Se ramener à un problème sur le fibré trivial

À l'aide d'une transformation birationnelle à paramètre, nous pouvons nous ramener à un problème sur le fibré trivial  $\mathcal{X} \times \mathbf{P}^1$  afin de démontrer le théorème 3.1.

Soit  $\pi : P \rightarrow X$  un fibré en  $\mathbf{P}^1$  au-dessus d'une surface de Riemann compacte. Rappelons le fait qu'une transformation birationnelle sur  $P$  se décompose (de manière non unique en général) en un nombre fini de transformations élémentaires successives (cf. [LP07], page 737). Soit  $p$  un point de  $P$ , donné en coordonnées locales  $(x, y) \in U \times \mathbf{P}^1$  par  $(x_0, y_0)$ . Alors la transformation élémentaire  $\text{elm}_p : P \dashrightarrow P'$  de centre  $p$  est donnée sur  $U \times \mathbf{P}^1$  par la transformation biméromorphe  $(x', y') = (x, \frac{y-y_0}{x-x_0})$  et par un isomorphisme au-dessus de  $X \setminus \pi(p)$ . Le fibré en  $\mathbf{P}^1$  obtenu  $P'$  ne dépend pas de la carte de trivialisatation locale choisie, à isomorphisme près (cf. section A.2.4 de l'annexe). Géométriquement, la transformation élémentaire  $\text{elm}_p$  se décompose en l'éclatement de  $P$  au point  $p$  et la contraction de la transformée propre de la fibre de  $\pi$  qui contient  $p$  (cf. [GH94], page 510). Cette contraction définit un point  $q$  sur  $P'$ , tel que la transformation élémentaire de centre  $q$  sur  $P'$  est inverse à la transformation élémentaire de centre  $p$  sur  $P$ , à isomorphisme du fibré  $P$  près. Dans les coordonnées ci-dessus,  $q$  est donné par  $(x', y') = (x_0, \infty)$ .

On peut également définir une transformation élémentaire à paramètre sur un fibré à paramètre  $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}$  sur  $\mathcal{X} \rightarrow T$ . On se donne un diviseur  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{X}$ , qui est transverse au paramètre  $t$ , ainsi qu'une section holomorphe  $s : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}$ . À changement de coordonnées près, la position de  $\mathcal{D}$  sur  $\mathcal{X}$  et du graphe de  $s$  sur  $\mathcal{P}$  ne dépendent pas du paramètre  $t$ . Pour de telles coordonnées locales sur  $T \times U \times \mathbf{P}^1$ , nous définissons  $\text{elm}_s$  comme ci-dessus, c'est-à-dire comme dans la situation sans paramètre. Comme dans la situation sans paramètre, nous voyons alors que le fibré obtenu est bien défini. Dans la section A.2.4 de l'annexe, nous définissons des transformations élémentaires sur les fibrés vectoriels de rang 2 à paramètre. Les transformations élémentaires sur les fibrés en  $\mathbf{P}^1$  à paramètre s'obtiennent par projectivisation à partir de ces derniers.

Revenons à la démonstration du théorème 3.1, avec les notations des sections précédentes. Choisissons trois sections  $\sigma_0, \sigma_1$  et  $\sigma_\infty$  de  $\mathcal{P}$  en position générale. Notons  $p_1, \dots, p_M$  les «points à paramètre» dans  $\mathcal{P}$  où deux parmi ces trois sections s'intersectent. En fait, grâce à la transversalité des sections  $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty$  au paramètre  $t$ , les  $p_i$  pour  $i \in \{1, \dots, M\}$  sont des section du type  $s : T \rightarrow \mathcal{P}$  comme dans la définition des transformations élémentaires à paramètre. Appliquons la transformation birationnelle  $\Phi : \mathcal{P} \dashrightarrow \mathcal{P}'$  qui est la composée des transforma-

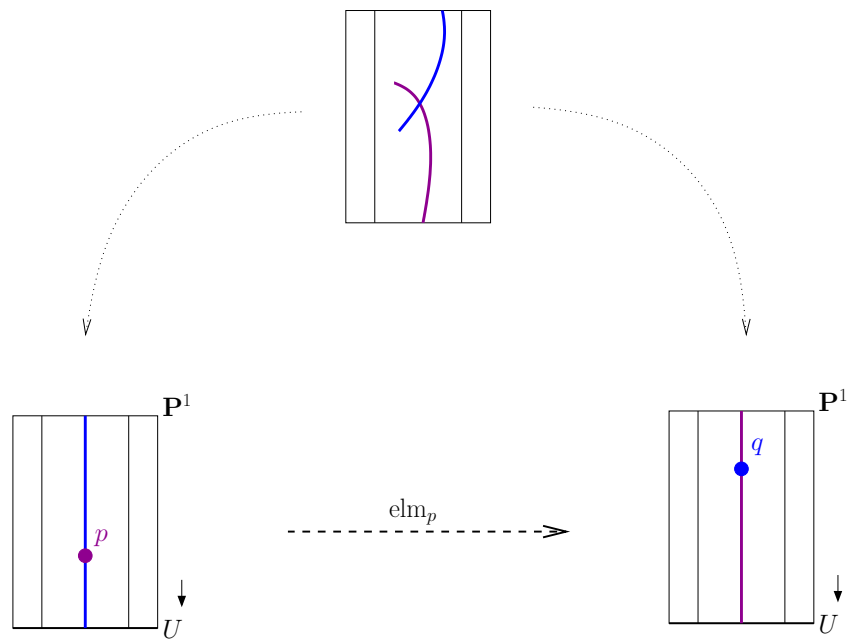


FIG. 3.9 – Transformation élémentaire de centre  $p$

tions élémentaires  $\text{elm}_{p_1}, \dots, \text{elm}_{p_M}$ . Par construction, les sections  $\sigma'_0, \sigma'_1$  et  $\sigma'_\infty$  images des sections  $\sigma_0, \sigma_1$  et  $\sigma_\infty$  par cette transformation élémentaire sont deux à deux disjointes. Par conséquent, nous pouvons supposer que les sections  $\sigma'_0, \sigma'_1$  et  $\sigma'_\infty$  sont données par les sections constantes égales à 0, 1 et  $\infty$  respectivement, et le fibré  $\mathcal{P}'$  sur  $\mathcal{X}$  est le fibré trivial  $\mathcal{P}' = \mathcal{X} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ . Notons  $q_1, \dots, q_M$  les centres des inverses des transformations élémentaires en  $p_1, \dots, p_M$ .

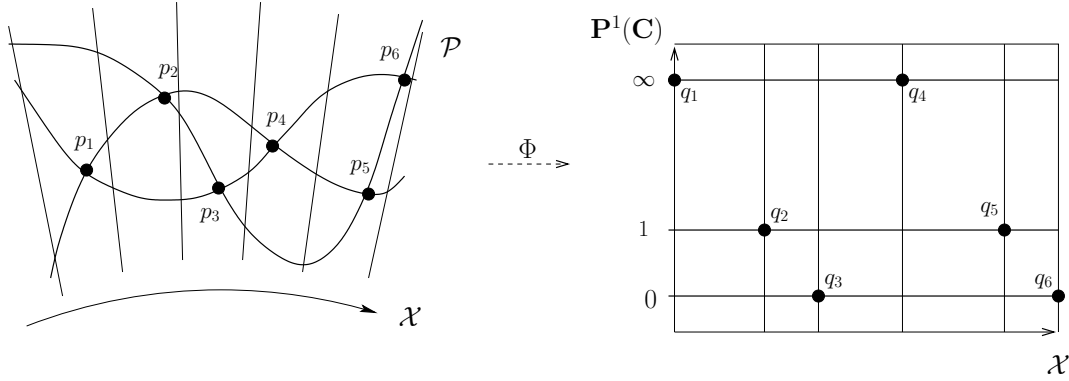


FIG. 3.10 – Obtenir le fibré trivial via des transformations élémentaires dans les intersections

On peut obtenir le fibré  $\mathcal{P}$  à partir du fibré trivial  $\mathcal{X} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  par la composée des transformations élémentaires  $\text{elm}_{q_M}, \dots, \text{elm}_{q_1}$ . Ainsi, le fibré  $\mathcal{P}$  est donné par la position de  $q_1, \dots, q_M$  sur  $\mathcal{X} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$ . Rappelons-nous que les points  $p_1(t), \dots, p_M(t)$  et  $q_1(t), \dots, q_M(t)$  dépendent de manière holomorphe du paramètre  $t \in T$ , puisque c'est le cas pour les sections  $\sigma_0, \sigma_1$  et  $\sigma_\infty$ . À l'aide de la transformation birationnelle  $\Phi$ , nous pouvons reformuler le théorème 3.1 de la manière suivante.

**Proposition 3.11** *Pour tout entier  $k$  l'ensemble*

$$T_k = \left\{ t \in T \mid \begin{array}{l} \exists \sigma' \text{ section du fibré trivial } X_t \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C}) \\ \text{telle que } \sigma \cdot \sigma \leq k, \text{ où } \sigma = \Phi^{-1}(\sigma') \end{array} \right\}$$

*est un sous-ensemble analytique fermé de  $T$ . Ici, nous notons  $\sigma = \Phi^{-1}(\sigma')$  la transformée stricte par rapport à  $\Phi^{-1}$  de la section  $\sigma'$ .*

**Remarque 3.12** *En la considérant comme une famille analytique de courbes munies de  $M$  points sur le fibré trivial, nous avons plongé la famille analytique de fibrés  $(P_t \rightarrow X_t)_{t \in T}$  dans une famille algébrique. Nous pourrions maintenant*

utiliser directement le résultat de M. Maruyama pour conclure. Cependant, nous avons tous les éléments pour démontrer de manière élémentaire la semi-continuité dans notre cadre. Nous voulons en plus récupérer, pour un point générique de  $T_k$ , une section à paramètre réalisant le nombre d'auto-intersection minimal.

Fixons dans un premier temps un paramètre  $t_1 \in T$ . Notons  $\sigma'_0$  la section zéro du fibré trivial  $X_{t_1} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  et notons  $f$  une fibre. Soit  $\sigma' \equiv \sigma'_0 + d \cdot f$  une section du fibré trivial  $X_{t_1} \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  de degré  $d$ . L'auto-intersection de  $\sigma'$  est alors

$$\sigma' \cdot \sigma' = 2d.$$

D'après la formule (A.11) de l'annexe, le nombre d'auto-intersection d'une section diminue d'un cran après à une transformation élémentaire de centre  $q$ , si  $q$  se trouve sur le graphe de la section. Sinon, le nombre d'auto-intersection augmente d'un cran. Soit  $m$  le nombre des points parmi  $q_1(t_1), \dots, q_M(t_1)$  qui se trouvent sur la section  $\sigma'$ . L'auto-intersection de la section  $\sigma = \Phi|_{t=t_1}^{-1}(\sigma')$  est alors

$$\sigma \cdot \sigma = 2d - m + M - m.$$

Nous avons  $\sigma \cdot \sigma \leq k$  si et seulement si

$$2m \geq 2d + M - k, \quad (3.3)$$

c'est-à-dire si et seulement si la section  $\sigma'$  passe par au moins  $d + \lceil \frac{M-k}{2} \rceil$  points parmi  $q_1(t_1), \dots, q_M(t_1)$ . L'inégalité (3.3) nous montre de plus que si  $\sigma'$  est de degré inférieur à  $d$  mais passe néanmoins par (au moins)  $d + \lceil \frac{M-k}{2} \rceil$  points parmi  $q_1(t_1), \dots, q_M(t_1)$ , alors l'auto-intersection de la section  $\sigma$  reste inférieure ou égale à  $k$ .

Notons  $m_k$  le nombre  $\lceil \frac{M-k}{2} \rceil$ . D'après ce qui précède, nous pouvons voir l'ensemble  $T_k$  de la manière suivante :

$$T_k = \bigcup_{m=m_k}^M \bigcup_{\substack{I \subset \{1, \dots, M\} \\ \#I = m}} V_{I, m-m_k},$$

où  $V_{I,d}$  avec  $I \subset \{1, \dots, M\}$  et  $d \geq 0$  désigne l'ensemble des paramètres  $t \in T$  tels qu'il existe une section  $\sigma'$  du fibré trivial  $X_t \times \mathbf{P}^1(\mathbf{C})$  de degré au plus  $d$  qui passe par  $q_i(t)$  (au moins) pour tout  $i \in I$ .

**Remarque 3.13** La formule  $2d + M - 2m = k$  nous rappelle que pour tout paramètre  $t \in T$  et toute section  $\sigma$  du fibré  $P_t$ , le nombre  $k$  d'auto-intersection

de  $\sigma$  possède la même parité : celle de  $M$ . En particulier, la parité du nombre d'auto-intersection minimal des sections du fibré  $P_t$  ne dépend pas du paramètre  $t \in T$ .

Nous allons montrer dans la section suivante que pour tout  $I \subset \{1, \dots, M\}$  et  $d \geq 0$  l'ensemble  $V_{I,d}$  est un sous-ensemble analytique fermé de  $T$ . Comme l'ensemble  $T_k$  est une réunion finie de tels ensembles, il sera alors lui-même un sous-ensemble analytique fermé de  $T$ .

### 3.4.3 Construction de $T_k$ à partir de fermés de Zariski

Afin de démontrer le théorème 3.1, il suffit maintenant de démontrer le lemme suivant.

**Lemme 3.14** *L'ensemble  $V_{I,d}$  introduit ci-dessus est un sous-ensemble analytique fermé de  $T$ .*

Résumons d'abord l'idée de la démonstration qui va suivre. Nous considérons notre famille  $(X_t, (q_i(t))_{i \in I})_{t \in T}$  des surfaces de Riemann  $X_t$  avec des points  $q_i(t) \in X_t \times \mathbf{P}^1$  comme l'image d'une application holomorphe  $Q : T \rightarrow \Xi \times W_I$ , où  $\Xi \times W_I$  est une variété algébrique projective dont les éléments sont des paires  $(X, (q_i)_{i \in I})$  d'une courbe  $X$  et de points  $q_i \in X \times \mathbf{P}^1$ . Nous construisons une variété algébrique de triplets  $(X, (q_i)_{i \in I}, s)$ , qui peuvent être interprétés comme des courbes  $X$ , avec des points  $q_i$  dans  $X \times \mathbf{P}^1$  et une section holomorphe  $\sigma : X \rightarrow \mathbf{P}^1$  du fibré trivial  $X \times \mathbf{P}^1$ . Demander à ce que le degré de  $\sigma$  soit inférieur ou égal à  $d$  et que les points  $q_i$  appartiennent au graphe de  $\sigma$  est une condition algébrique sur ces triplets. Nous obtenons alors un certain sous-ensemble algébrique de l'ensemble de ces triplets. En le projetant sur l'ensemble des paires  $(X, (q_i)_{i \in I})$ , nous obtenons une certaine sous-variété algébrique  $W_{I,d}$  de  $\Xi \times W_I$ , qui peut être vue comme l'ensemble des paires  $(X, (q_i)_{i \in I})$  telles qu'il existe une section  $\sigma : X \rightarrow \mathbf{P}^1$  de degré au plus  $d$ , passant par  $q_i$  pour tout  $i \in I$ . De plus,  $V_{I,d}$  est le pull-back du sous-ensemble algébrique  $W_{I,d}$  sous l'application holomorphe  $Q$ . L'ensemble  $V_{I,d}$  est donc un sous-ensemble analytique fermé de  $T$ .

$$\begin{array}{ccc}
 \Xi \times W_I & \xrightarrow{\text{algébrique}} & W_{I,d} \\
 \uparrow Q \text{ holomorphe} & & \uparrow Q \\
 T & \xrightarrow{\text{analytique}} & V_{I,d}
 \end{array}$$



Pour cette démonstration, un autre point de vue de la courbe à paramètre  $\mathcal{X} \rightarrow T$  s'avère utile. Nous savons déjà que  $\mathcal{X}$  peut être vue comme une famille de courbes algébriques non singulières dans  $\mathbf{P}^{g+1}$ . Nous pouvons aussi considérer  $\mathcal{X}$  comme une famille de courbes algébriques singulières (dans le cas  $g > 1$ ) dans  $\mathbf{P}^2$ . Pour cela, choisissons un plan  $\mathbf{P}^2$  générique dans  $\mathbf{P}^{g+1}$  et projetons la famille  $\mathcal{X}$  sur  $T \times \mathbf{P}^2$ . Comme cette projection est générique, les singularités des courbes algébriques ainsi obtenues pour tout paramètre  $t$  sont en fait des singularités à croisement ordinaire. Le long d'une telle famille analytique de courbes, le degré  $\delta$  de la courbe ainsi que le nombre  $o$  de singularités ordinaires sont constants. Ces nombres sont en relation avec le genre  $g$  de la courbe via la formule de Plücker (cf. [GH94], page 280) :

$$2(g + o) = (\delta - 1)(\delta - 2).$$

Or toute courbe algébrique de degré  $\delta$  dans  $\mathbf{P}^2$  peut être vue comme l'ensemble des zéros d'un seul polynôme homogène de degré  $\delta$ . Cela nous permet de considérer l'ensemble algébrique  $\Xi$  des courbes (éventuellement dégénérées) de degré  $\delta$  dans  $\mathbf{P}^2$  qui possèdent (au moins)  $o$  singularités. La famille  $\mathcal{X}$  peut alors être vue comme l'image d'une application holomorphe  $T \rightarrow \Xi$ .

Nous allons maintenant établir une manière algébrique de voir une section holomorphe  $\sigma$  du fibré trivial  $X \times \mathbf{P}^1$ , qui est de degré au plus  $d$  (en tant que revêtement ramifié de  $\mathbf{P}^1$ ). Soit  $X$  une courbe algébrique de degré  $\delta$  dans  $\mathbf{P}^2$ . Soit  $N$  un entier, et soient  $P$  et  $Q$  deux polynômes homogènes à trois variables de degré  $N$ . Alors si  $\frac{P}{Q}$  est réduit et  $X$  n'a pas de composante commune avec  $P$ , le graphe de  $\frac{P}{Q}$  définit une courbe algébrique  $\tilde{\sigma}$  de bidegré  $(1, \tilde{d})$  avec  $\tilde{d} = N\delta$  dans  $X \times \mathbf{P}^1$ , où les points d'indétermination de  $\frac{P}{Q}$  correspondent à des droites verticales dans le graphe. En «enlevant» les droites verticales, la courbe  $\tilde{\sigma}$  définit une section holomorphe  $\sigma : X \rightarrow \mathbf{P}^1$  dont le degré (en tant que revêtement ramifié de  $\mathbf{P}^1$ ) est  $\tilde{d} - \nu$ , où  $\nu$  est le nombre de droites verticales (comptées avec multiplicité).

Réciproquement, il existe un entier  $N_{\max}$  tel que pour tout paramètre  $t \in T$ , toute section holomorphe du fibré trivial  $X_t \times \mathbf{P}^1$  provient du quotient de deux polynômes homogènes (en trois variables) de degré au plus  $N_{\max}$ .

Notons  $W_N$  la variété algébrique projective composée de paires  $(X, (P : Q))$  de courbes de degré  $\delta$ , possédant  $o$  singularités, et de polynômes homogènes  $P$  et  $Q$  de degré  $N$ . Le nombre de droites verticales est bien défini géométriquement en dehors d'un ensemble exceptionnel  $E_{\text{ex}}$ , qui forme une sous-variété de codimension supérieure ou égale à 2. Pour tout entier  $l$ , nous pouvons néanmoins considérer la clôture algébrique  $E_l$  de l'ensemble des points dans  $W_N$  dont le nombre des droites

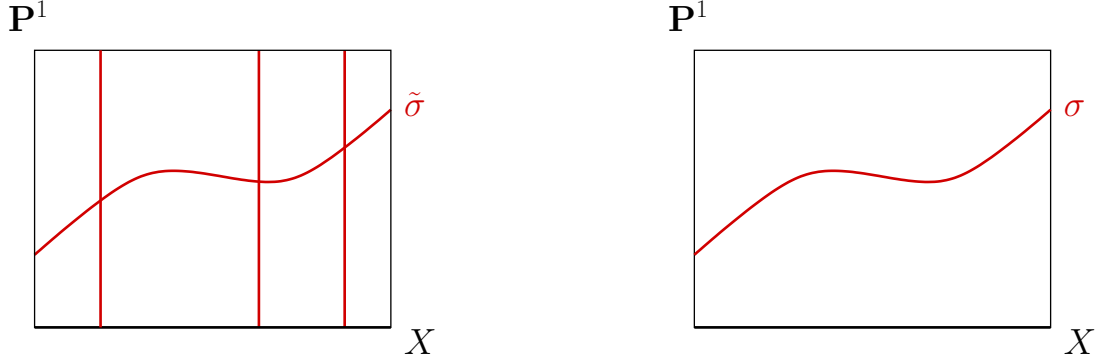


FIG. 3.11 – Si le bidegré de la courbe  $\tilde{\sigma}$  est  $(\tilde{d}, 1)$ , alors le degré de la section holomorphe induite  $\sigma$  en «enlevant» les droites verticales est  $d = \tilde{d} - \nu$ , où  $\nu$  est le nombre de droites verticales.

verticales est bien défini et est au moins  $l$ . En ce sens, l'application qui associe à chaque point de  $W_N$  le nombre de droites verticales est semi-continue supérieurement. L'ensemble  $E_{\text{ex}}$  est l'ensemble des points  $(X, (P : Q))$  dans  $W_N$  tel que  $X, P$  et  $Q$  ont une composante commune. L'adhérence topologique de  $E_l \setminus E_{\text{ex}}$  est égale à  $E_l$ . D'autre part, considérons une famille algébrique de courbes de bidegré  $(1, \tilde{d})$ , qui rencontre l'ensemble exceptionnel  $E_{\text{ex}}$ . Alors par un processus limite, la section holomorphe sous-jacente, obtenue en «enlevant» les droites verticales est bien définie géométriquement sur  $E_{\text{ex}}$ , contrairement aux droites verticales. D'autre part, comme l'ensemble des courbes de bidegré donné est compact, l'ensemble des droites verticales possède une valeur d'adhérence, qui est au moins de cardinal  $l$ . Nous pouvons alors définir de manière cohérente le fermé de Zariski (projectif)  $W_{N,d}$  des points  $(X, (P : Q))$  dans  $W_N$  tels que les courbes définies par  $\frac{P}{Q}$  sur  $X \times \mathbf{P}^1$  possèdent au moins  $N\tilde{d} - d$  droites verticales.

En «enlevant» les droites verticales génériques, la variété algébrique  $W_{N,d}$  paramètre une courbe algébrique  $\Sigma$  de bidegré  $(1, d)$  sur  $\Xi \times \mathbf{P}^1$ , qui définit génériquement une section holomorphe. Notons ensuite  $W_I$  l'ensemble des  $I$ -uplets de points dans  $\mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^1$ . Soit  $W_{N,I,d}$  le fermé de Zariski (projectif) dans  $W_{N,d} \times W_I$  qui décrit l'ensemble des triplets  $(X, \sigma, (q_i)_{i \in I})$  des courbes algébriques  $\sigma$  de bidegré  $(1, d)$  dans  $X \times \mathbf{P}^1$  tels que  $(q_i)_{i \in I}$  appartient au graphe de  $\sigma$ . En projetant  $\bigcup_{N=0}^{N_{\text{max}}} W_{N,I,d}$  sur  $\Xi \times W_I$ , nous obtenons l'ensemble  $W_{I,d}$  des courbes  $X$ , avec des  $I$ -uplets de points sur  $X$ , tel qu'il existe une section holomorphe de degré au plus  $d$  du fibré trivial passant par ces points. Il s'agit d'un fermé de Zariski, car cette projection définit un morphisme entre variétés projectives (*cf.* [Mum88], pages

54-57). Considérons l'application

$$\begin{aligned} Q : T &\rightarrow \Xi \times W_I \\ t &\mapsto (X_t, (q_i(t))_{i \in I}). \end{aligned}$$

Comme l'application  $Q$  est holomorphe, l'ensemble  $V_{I,d} = Q^{-1}(W_{I,d})$  est la pré-image de l'ensemble algébrique  $W_{I,d}$  sous une application analytique. Il s'ensuit que  $V_{I,d}$  est un sous-ensemble analytique fermé.

### 3.5 Corollaire : section globale avec nombre d'auto-intersection constant

Nous aurions pu démontrer le théorème 3.1, en nous reportant au théorème de semi-continuité de M. Maruyama, à l'aide de résultats du type GAGA. Cependant, la démonstration ci-dessus nous fournit un corollaire qui sera important par la suite.

Soit  $(P_t \rightarrow X_t)_{t \in T}$  une famille analytique de fibrés en  $\mathbf{P}^1$  sur des surfaces de Riemann compactes. D'après théorème 3.1, il existe un entier  $k_0$  tel que le nombre d'auto-intersection minimal des sections est génériquement égal à  $k_0$  le long de  $T$ . De plus, nous avons le résultat suivant.

**Corollaire 3.15** *Soit  $t_0$  un paramètre générique dans  $T$ , c'est-à-dire  $t_0$  appartient au complémentaire d'un certain sous-ensemble analytique fermé de  $T$ . Alors, en restriction au germe  $(T, t_0)$ , il existe une section holomorphe globale  $\Sigma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}$  qui induit par restriction, pour tout paramètre  $t \in (T, t_0)$ , une section holomorphe  $\sigma_t : X_t \rightarrow P_t$  telle que*

$$\sigma_t \cdot \sigma_t = k_0.$$

**Démonstration :** Reprenons une partie de la démonstration du théorème 3.1. Nous pouvons décomposer le germe  $(T, t_0)$  en une réunion finie de sous-ensembles analytiques fermés  $V_{I,d}$ . Il existe alors un entier  $d$  et un sous-ensemble  $I \subset \{1, \dots, M\}$  tels que  $V_{I,d}$  s'identifie à  $(T, t_0)$ . Autrement dit, pour tout paramètre  $t \in T$  il existe une section  $\sigma : X_t \rightarrow P_t$  de degré inférieur ou égal à  $d$ , dont le graphe contient les points  $q_i(t)$  avec  $i \in I$ . Par conséquent  $\sigma \cdot \sigma \leq k_0$ . Nous cherchons à montrer que nous pouvons choisir de telles sections  $\sigma_t$  qui dépendent holomorphiquement du paramètre  $t$ , quitte à choisir un autre point base  $t'_0$  dans le voisinage de  $t_0$  et se restreindre au germe  $(T, t'_0)$ .

Il existe un entier  $N$  tel que pour tout paramètre générique  $t \in T$ , toute section  $\sigma : X_t \rightarrow P_t$  de degré inférieur ou égal à  $d$ , dont le graphe contient les

points  $q_i(t)$  avec  $i \in I$  est obtenue à partir d'un quotient  $\frac{P}{Q}$  de deux polynômes homogènes de degré  $N$  tel que  $\frac{P}{Q}|_{X_t}$  est réduit. Autrement dit, la famille analytique  $(X_t, (q_i(t))_{i \in I})_{t \in T}$  est contenue dans la projection  $\pi$  de  $W_{N,I,d}$  sur  $\Xi \times W_I$ , mais elle n'est pas contenue dans la projection de  $W_{(N-1),I,d}$ . Or  $W_{N,I,d}$  est une variété algébrique qui paramètre une famille algébrique de sections de degré  $d$ , passant par  $I$  points donnés. Au voisinage des points associés à  $(X_t, (q_i(t))_{i \in I})$  pour  $t \in T \setminus T_{k_0-1}$ , la famille de courbes  $X$  avec des points  $q \in X \times \mathbf{P}^1$ , paramétrée par la variété  $\Xi \times W_I$  est lisse, et  $W_{N,I,d}$  paramètre une famille de sections de  $X \times \mathbf{P}^1$  sans droites verticales. Considérons un germe de voisinage de la fibre  $\pi^{-1}((X_t, (q_i(t))_{i \in I}))$  pour un paramètre  $t \in T \setminus T_{k_0-1}$ . En restriction à une composante connexe «surjective»  $W$  de ce germe dans  $W_{N,I,d}$ , la projection  $\pi$  est lisse et surjective. De plus, si  $t_0$  est un point générique de  $T \setminus T_{k_0-1}$  la préimage  $\pi^{-1}((X_t, (q_i(t))_{i \in I})_{t \in (T, t_0)})$  ne possède pas de singularité dans  $W$ . Ainsi, la projection de  $W \cap \pi^{-1}((X_t, (q_i(t))_{i \in I})_{t \in (T, t_0)})$  sur  $(X_t, (q_i(t))_{i \in I})_{t \in (T, t_0)}$  est holomorphe au voisinage d'un paramètre générique  $t_0 \in T \setminus T_{k_0-1}$ . Si, d'autre part, le paramètre initial  $t_0$  est générique dans  $T \setminus T_{k_0-1}$ , alors la restriction de la projection  $\pi$  à  $W \cap \pi^{-1}((X_t, (q_i(t))_{i \in I})_{t \in (T, t_0)})$  est une submersion sur  $(X_t, (q_i(t))_{i \in I})_{t \in (T, t_0)}$ . Autrement dit, au voisinage d'un point générique de  $T$ , nous pouvons relever  $(X_t, (q_i(t))_{i \in I})_{t \in T}$  en une famille analytique de sections holomorphes  $\sigma_t : X_t \rightarrow \mathbf{P}^1$  de degré  $d$  passant par les points donnés.  $\square$

**Remarque 3.16** *Pour un fibré en  $\mathbf{P}^1$  au-dessus d'une surface de Riemann, l'ensemble des sections  $\sigma$  avec nombre d'auto-intersection minimal  $k$  est une famille à un paramètre si  $k = g$  et discret en général si  $k < g$  d'après un résultat de M. Maruyama (cf. [Mar70] et [LN83]). Si  $k < g$ , le long d'une famille analytique de fibrés en  $\mathbf{P}^1$  ayant tous  $k$  comme nombre d'auto-intersection minimal des sections, nous n'avons donc pas beaucoup de choix en général pour la construction des sections  $\sigma_t$  ci-dessus.*

## Chapitre 4

# Stabilité maximale des fibrés vectoriels le long de déformations isomonodromiques

Dans cette partie, qui contient le théorème principal de cette thèse, nous nous intéressons à la stabilité du fibré vectoriel sous-jacent, qui varie le long d'une déformation isomonodromique. Pour chacun des résultats exposés par la suite, nous donnons une esquisse de démonstration. Pour les détails, le lecteur pourra se reporter à l'article en annexe.

### 4.1 Degré de stabilité

Nous définissons le *degré de stabilité* d'un fibré vectoriel  $E$  de rang 2 sur une surface de Riemann  $X$  compacte par le nombre

$$\kappa(E) = \min\{\deg(E) - 2\deg(L) \mid L \text{ sous-fibré en droites de } E\}.$$

Si  $\kappa(E) > 0$  (resp.  $\kappa(E) \geq 0$ ), le fibré  $E$  est dit *stable* (resp. *semi-stable*). Le degré de stabilité ne peut jamais dépasser le genre  $g$  de la surface de Riemann  $X$  (cf. [Nag70], page 191). Dans les cas  $\kappa(E) = g$  et  $\kappa(E) = g - 1$ , nous disons que le fibré  $E$  est «*maximalement*» *stable*.

**Exemple 4.1** *Si  $E$  est la somme directe de deux fibrés en droites sur  $X$  :*

$$E = L_1 \oplus L_2,$$

alors tout sous-fibré  $L$  de  $E$  se projette sur  $L_i$  pour  $i = 1, 2$

$$L \longrightarrow L_1 \oplus L_2 \longrightarrow L_i.$$

Cette projection est non triviale si  $L$  est différent de  $L_1$  et  $L_2$ . Dans ce cas, nous avons  $\deg(L) \leq \deg(L_i)$  pour  $i = 1, 2$  (cf. [Mar70], page 6). Le degré de stabilité du fibré  $E$  est alors

$$\kappa(E) = (\deg(L_1) + \deg(L_2)) - 2 \max\{\deg(L_1), \deg(L_2)\}.$$

En particulier, si  $E$  est le fibré trivial, qui est somme directe de deux fibrés en droites triviaux, alors son degré de stabilité vaut zéro. Le fibré trivial  $X \times \mathbf{C}^2 \rightarrow X$  est donc «maximalement» stable si, et seulement si le genre de  $X$  vaut 0 ou 1.

Si  $E$  peut être muni d'une connexion méromorphe  $\nabla$  à  $n$  pôles (comptés avec multiplicité), et si cette connexion est irréductible, c'est-à-dire s'il n'existe pas de sous-fibré en droites  $L$  de  $E$  invariant sous  $\nabla$ , alors le degré de stabilité de  $E$  est compris entre les bornes suivantes :

$$2 - 2g - n \leq \kappa(E) \leq g. \quad (4.1)$$

La première inégalité provient de la formule (4.6) citée plus bas, qui est due à M. Brunella.

Remarquons que le nombre  $\kappa(E)$  est forcément pair si  $E$  peut être muni d'une connexion sans trace. Si un tel fibré vectoriel  $E$  est «maximalement» stable, son degré de stabilité est alors  $g$ , si  $g$  est pair, et  $g - 1$  sinon.

## 4.2 Résultat principal

**Théorème 4.2** Soit  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  la déformation isomonodromique universelle d'un fibré de rang 2 à connexion méromorphe, irréductible et sans trace  $(E_0, \nabla_0)$  sur  $X_0$ . Alors pour tout paramètre  $t \in T$  générique le long de cette déformation, le fibré vectoriel  $E_t$  associé est «maximalement» stable.

Plus précisément, pour tout entier  $k$ , l'ensemble

$$T_k = \{t \in T \mid \kappa(E_t) \leq k\}$$

est un sous-ensemble analytique fermé de  $T$  de codimension au moins  $g - 1 - k$ .

Ceci est le résultat principal de cette thèse. Il montre en particulier que le fibré vectoriel sous-jacent à une déformation isomonodromique non triviale d'un fibré à connexion *non singulière*, irréductible et sans trace sur une surface de Riemann de genre au moins 2 est génériquement stable.

**Corollaire 4.3** *Soit  $(E_0, \nabla_0)$  un fibré à connexion  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  irréductible sur  $\mathbf{P}^1$ . Notons par  $E_t$  le fibré vectoriel associé au paramètre  $t \in T$  dans la déformation isomonodromique universelle de  $(E_0, \nabla_0)$ . Rappelons qu'un tel fibré est de la forme*

$$E_t \cong \mathcal{O}(\frac{1}{2}\kappa(E_t)) \oplus \mathcal{O}(-\frac{1}{2}\kappa(E_t)).$$

*Alors pour tout paramètre  $t \in T$  générique, le fibré  $E_t$  est le fibré trivial :*

$$E_t = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}.$$

Ce corollaire du théorème 4.2 a été démontré pour certains fibrés à connexion logarithmique résonante par A. Bolibruch dans [Bol90]<sup>1</sup>. Le théorème ci-dessus est une généralisation d'un théorème de A. Bolibruch dans l'esprit de [EV99] et [EH01].

Dans la section 4.5, nous construisons un exemple de déformation isomonodromique où l'ensemble exceptionnel  $T_{g-2}$  (appelé diviseur  $\Theta$  dans [Mal83b]) est donné explicitement. Cet exemple montre en particulier que l'ensemble exceptionnel est vraiment analytique, c'est-à-dire non algébrique en général.

Dans la section 4.3.3, nous démontrons la version plus forte suivante du théorème 4.2, qui englobe les fibrés à connexion réductibles.

**Théorème 4.4** *Soit  $(E_t, \nabla_t)_{t \in T}$  la déformation isomonodromique universelle d'un fibré à connexion méromorphe de rang 2 et sans trace sur une surface de Riemann compacte.*

- *Si le fibré à connexion initial est décomposable en somme directe de deux fibrés à connexion de rang 1, alors le degré de stabilité  $\kappa(E_t)$  est constant le long de la déformation.*
- *Si le fibré à connexion initial  $(E_0, \nabla_0)$  est réductible mais non décomposable, alors il existe un unique sous-fibré en droites  $L_0$  de  $E_0$  qui est invariant par la connexion  $\nabla_0$ . Pour  $\tilde{k}_0 = \deg(\det(E_0)) - 2\deg(L_0)$  et  $k_0 = \min\{g, \tilde{k}_0\}$  nous avons alors*

$$\begin{cases} T = T_{k_0} \\ \text{codim}(T_k) \geq g - 1 + k \quad \forall k < k_0. \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>À la page 37, A. Bolibruch énonce que si  $(E_0, \nabla_0)$  est un fibré à connexion logarithmique irréductible de rang 2, possédant au moins 4 pôles et tel qu'aucune de ses matrices de monodromie n'est diagonalisable, et si le fibré sous-jacent n'est pas «maximalement» stable, alors il existe un choix  $a_i$  parmi les pôles tel que le degré de stabilité descend pour toute déformation isomonodromique qui correspond à un mouvement suffisamment petit de  $a_i$  dans  $\mathbf{P}^1$ .

– Si le fibré à connexion initial est irréductible, alors nous avons

$$\begin{cases} T = T_g \\ \text{codim}(T_k) \geq g - 1 + k \quad \forall k < g. \end{cases}$$

L'interprétation immédiate la plus importante du théorème 4.2 est la suivante. Lorsque l'on se restreint, dans l'étude des déformations isomonodromiques, aux fibrés vectoriels stables ou semi-stables, on n'oublie que des connexions réductibles. Autrement dit, il n'existe pas de déformation isomonodromique d'un fibré à connexion initial irréductible qui ne soit pas contenue dans une autre déformation isomonodromique dont le fibré vectoriel sous-jacent est génériquement stable (respectivement semi-stable). Or les espaces de modules des fibrés vectoriels stables (respectivement semi-stables) de rang  $r$  sont consistants au sens où ils forment une variété algébrique complexe (éventuellement singulière). En pratique, on se restreint à ces espaces afin d'établir des équations d'isomonodromie, comme par exemple dans le cas des équations de Painlevé. Notre résultat fournit une justification.

## 4.3 Preuve du résultat principal

### 4.3.1 Interprétation en termes de feuilletages de Riccati

Pour la démonstration du théorème 4.2, il s'avère utile de considérer le fibré projectif  $\mathbf{P}(E)$  plutôt que le fibré vectoriel  $E$  de rang 2, car nous pouvons interpréter les solutions d'un fibré à connexion projectif comme les feuilles d'un feuilletage de Riccati, et profiter des nombreuses propriétés géométriques de ces derniers. Il s'agit notamment de feuilletages de codimension 1 sur des fibrés projectifs en  $\mathbf{P}^1$ . Leurs seules feuilles non transverses à la fibration en  $\mathbf{P}^1$  sont les feuilles verticales situées au-dessus des pôles de la connexion. Pour une étude en détail des feuilletages de Riccati nous renvoyons le lecteur au livre [Bru04] de M. Brunella.

Le degré de stabilité d'un fibré vectoriel  $E$  de rang 2 ne dépend que du fibré en  $\mathbf{P}^1$  associé  $\mathbf{P}(E)$  et peut être interprété géométriquement comme le nombre d'auto-intersection minimal des sections du fibré projectif  $\mathbf{P}(E)$

$$\kappa(E) = \min\{\sigma \cdot \sigma \mid \sigma \text{ section de } \mathbf{P}(E)\}.$$

Nous allons noter

$$(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{F}) = (P_t \rightarrow X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$$



le feuilletage de Riccati sur le fibré  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  en  $\mathbf{P}^1$  associé à la déformation isomonodromique universelle  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  d'un fibré à connexion irréductible initial  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  de rang 2 sans trace. Pour tout entier  $k$ , nous pouvons alors noter

$$T_k = \{t \in T \mid \exists \text{ section } \sigma \text{ de } P_t \text{ telle que } \sigma \cdot \sigma \leq k\}$$

en accord avec les notations de la section 4.2, et nous cherchons à démontrer

$$\text{codim}(T_k) \geq g - 1 - k. \quad (4.2)$$

La construction de la déformation isomonodromique universelle nous fournit trois propriétés du feuilletage  $(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{F})$  qui seront essentielles dans la preuve du théorème 4.2.

Premièrement, nous savons que le feuilletage  $\mathcal{F}$  est transverse au paramètre  $t \in T$ , c'est-à-dire transverse à  $\{t = \text{const}\}$ , car la déformation isomonodromique universelle est localement constante en  $t$ .

Deuxièmement, la propriété universelle 2.1 implique que la déformation  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  ne possède pas de sous-déformation triviale. Or pour tout fibré en  $\mathbf{P}^1$  il n'existe qu'un nombre fini de fibrés vectoriels de rang 2 de degré 0 dont il est le projectivisé. Par conséquent, le feuilletage  $(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{F}) = (P_t \rightarrow X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  ne possède pas non plus de sous-déformation triviale. Plus formellement, nous avons le corollaire suivant de la propriété universelle.

**Corollaire 4.5** *Soit  $T'$  une sous-variété de  $T$ . Considérons la restriction du feuilletage  $(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{F})$  au sous-espace de paramètres  $T'$ . Si le feuilletage obtenu  $(P_t \rightarrow X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T'}$  avec feuilles verticales en  $(D_t)_{t \in T'}$  est isomorphe au feuilletage constant  $(P_0 \rightarrow X_0, \mathcal{F}_0) \times T'$  avec feuilles verticales en  $D_0 \times T'$ , alors*

$$\dim(T') = 0.$$

Troisièmement, nous savons que l'espace des paramètres  $T$  est de dimension  $\dim(T) = \sup(0, 3g - 3 + n)$ , où  $n$  est le nombre de pôles comptés avec multiplicité du fibré à connexion initial. Le cas spécial  $(g, n) = (1, 0)$  est en effet exclu à cause de l'irréductibilité du fibré à connexion initial, ainsi que les cas  $(g, n) = (0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  pour la même raison. Lorsque  $\dim(T) = 0$  (et  $(E_0, \nabla_0)$  est irréductible), nous avons  $(g, n) = (0, 3)$  et le fibré  $E_0$  est «maximalement» stable d'après le lemme suivant.

**Lemme 4.6** *Soit  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  un fibré de rang 2 à connexion irréductible avec  $n$  pôles (comptés avec multiplicité) sur une surface de Riemann  $X_0$  de genre  $g$ . Si  $3g - 3 + n \leq 0$ , alors  $E_0$  est «maximalement» stable.*

**Démonstration :** Ce lemme est une conséquence immédiate de l'estimation (4.1) du nombre d'auto-intersection minimal de sections dans un feuilletage de Riccati irréductible.  $\square$

Dans la suite de la démonstration, nous pouvons alors supposer  $3g - 3 + n > 0$ , ce qui implique

$$\dim(T) = 3g - 3 + n. \quad (4.3)$$

#### 4.3.2 Se ramener à un problème de transversalité

Soit  $k$  un entier. Grâce aux considérations générales du chapitre 3, nous savons que  $T_k$  est une sous-variété analytique de  $T$ . Selon la formule (4.3), il suffit alors de montrer que

$$\dim(T_k) \leq k + 2g - 2 + n \quad (4.4)$$

afin de prouver théorème 4.2. Soit  $t_k$  un paramètre générique dans  $T_k$ . Il suffit alors de montrer (4.4) pour le germe  $(T_k, t_k)$ . De ce fait, nous considérons désormais la restriction de  $(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{F})$  à la germification de l'espace des paramètres  $(T_k, t_k)$ . Nous pouvons alors supposer que pour tout paramètre  $t \in (T_k, t_k)$ , le nombre d'auto-intersection minimal du fibré  $P_t$  est égal à  $k$  et qu'il existe une section globale  $\Sigma$  de  $\mathcal{P}$ , composée de sections de nombre d'auto-intersection minimal. Or  $\Sigma$  est isomorphe à la courbe de base  $\mathcal{X}$ ; la position des pôles correspond à l'intersection avec les feuilles verticales du feuilletage  $\mathcal{F}$ . Si, de plus, le feuilletage induit  $\mathcal{F}|_\Sigma$  est transverse au paramètre  $t$ , alors nous pouvons redresser  $\mathcal{F}|_\Sigma$  afin de trivialisier la fibration en courbes en même temps que la position des pôles. Autrement dit, nous obtenons

$$(X_t, D_t)_{t \in T_k} \cong (X_{t_k}, D_{t_k}) \times T_k. \quad (4.5)$$

Si, d'autre part, il y a des tangences entre le feuilletage induit  $\mathcal{F}|_\Sigma$  et le paramètre  $t$ , alors celles-ci proviennent de tangences entre le feuilletage  $\mathcal{F}$  et la section  $\Sigma$ , puisque nous savons que  $\mathcal{F}$  est transverse au paramètre. Comme le feuilletage de Riccati  $(P_{t_k}, \mathcal{F}_{t_k})$  est irréductible, la section  $\sigma_{t_k}$  du fibré  $P_{t_k}$  n'est pas invariante par le feuilletage. Nous pouvons alors appliquer la formule suivante de M. Brunella, pour compter le nombre de tangences entre  $\sigma_{t_k}$  et le feuilletage  $\mathcal{F}_{t_k}$  (cf. [Bru04], page 23)

$$\begin{aligned} \#\text{tang}(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k}) &= \sigma_{t_k} \cdot \sigma_{t_k} + 2g - 2 + n \\ &= k + 2g - 2 + n. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nous remarquons alors que la formule (4.4) que nous cherchons à démontrer est équivalente à la formule plus géométrique suivante

$$\dim(T_k) \leq \#\text{tang}(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k}), \quad (4.7)$$

ce qui s'avère être la clef de notre preuve. En effet, quitte à restreindre notre espace de paramètres à un sous-espace  $T'$  de codimension  $\#\text{tang}(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k})$  dans  $T_k$ , nous montrons que la version réduite du feuilletage induit  $\mathcal{F}|_\Sigma$  est transverse au paramètre  $t$ , ce qui trivialise la courbe de base  $(\mathcal{X}, \mathcal{D})$ . Puis, tout en laissant la courbe invariante, nous pouvons trivialiser localement le feuilletage  $\mathcal{F}$  de la manière suivante. En tout point non singulier, par définition de l'intégrabilité, le feuilletage  $\mathcal{F}$  se redresse sur le feuilletage trivial  $dy = 0$  par des transformations de jauge. En tout point singulier tel que la singularité ne donne pas lieu à une tangence, nous pouvons redresser  $\mathcal{F}$  via des transformations de jauge sur une forme normale  $dy = \frac{1}{x}(y^2 - c(x))dx$  constante en le paramètre  $t$ . Par contre, grâce à l'exemple A.51 en annexe, nous voyons que ceci est impossible en général pour des singularités multiples qui se situent sur la section  $\Sigma$  et qui donnent lieu à une tangence. Pour de telles singularités, il est possible d'affiner notre méthode pour chasser les tangences, ce qui permet enfin de trivialiser localement le feuilletage  $\mathcal{F}$  par des transformations de jauge. Finalement, nous trouvons des coordonnées  $(t, x, y)$  du fibré  $\mathcal{P}$  telles que la courbe et les changements de coordonnées soient triviaux, et le feuilletage  $\mathcal{F}$  soit localement trivial. Par conséquent, les applications de transition sont également constantes et nous avons trivialisé globalement le feuilletage et la courbe, quitte à restreindre l'espace des paramètres  $T_k$  à un sous-espace de codimension  $\#\text{tang}(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k})$ . La restriction de la déformation isomonodromique universelle à  $T'$  est triviale, ce qui implique  $\dim(T') = 0$  et nous permet de conclure par (4.7). Les détails de cette démonstration se trouvent dans la section A.5.3 de l'annexe.

### 4.3.3 Le cas réductible

L'hypothèse d'irréductibilité du théorème 4.2 est utilisée dans la preuve ci-dessus uniquement pour assurer que la section  $\sigma_{t_k}$  n'est pas invariante par le feuilletage  $\mathcal{F}_{t_k}$ . Nous pouvons utiliser ce fait pour démontrer la variante 4.4 du théorème.

Supposons maintenant que le fibré à connexion initial  $(E_0, \nabla_0)$  est réductible. Le fibré vectoriel  $E_0$  possède alors un sous-fibré en droites  $L_0$ , tel que  $\nabla_0$  induit une connexion  $\zeta_0$  sur  $L_0$ . Au niveau du feuilletage de Riccati associé  $(P_0, \mathcal{F}_0)$  cela signifie que la section  $s_0$  définie par le fibré en droites  $L_0$  est invariante par le

feuilletage. Soit  $\mathcal{S}$  l'unique feuille du feuilletage global  $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$  qui contient  $s_0$ . Pour tout paramètre  $t \in T$ , la section  $\mathcal{S}$  induit alors une section  $s_t$  de  $P_t$ , invariante par le feuilletage  $\mathcal{F}_t$ . Autrement dit, la déformation isomonodromique universelle  $(E_t, \nabla_t)_{t \in T}$  induit une famille intégrable de  $(L_t, \zeta_t)$  de fibrés à connexion de rang 1. Or la classe d'Euler  $\deg(L_t)$  ne peut pas changer le long d'une telle déformation :

$$\deg L_t = \deg L_0 \quad \forall t \in T.$$

Par conséquent, le nombre d'auto-intersection de la section  $s_t$  est constant en le paramètre  $t$  :

$$s_t \cdot s_t = \deg \det(E_t) - 2\deg L_t = -2\deg L_0.$$

Si le fibré à connexion initial est réductible mais non décomposable, il y a une unique section invariante  $s_0$ . Il est alors clair que le nombre d'auto-intersection minimal le long de la déformation ne peut jamais être plus grand que  $k_0 = \min\{g, s_0 \cdot s_0\}$ , c'est-à-dire

$$T = T_{k_0}.$$

D'autre part, pour tout  $k < k_0$  et tout paramètre  $t \in T_k$ , toute section  $\sigma_t$  de  $P_t$  dont le nombre d'auto-intersection est inférieur ou égal à  $k$  est différente de  $s_t$ . Par conséquent, elle n'est pas invariante par le feuilletage  $\mathcal{F}_t$  et nous pouvons appliquer la preuve du cas irréductible pour montrer que

$$\text{codim}(T_k) \geq g - 1 - k.$$

Si le fibré à connexion initial est décomposable, il possède deux sections distinctes  $s_0^1$  et  $s_0^2$  qui peuvent jouer le rôle de la section  $s_0$  dans le raisonnement ci-dessus. Ces deux sections permettent de montrer que le fibré à connexion plat définissant la déformation isomonodromique universelle est lui-même décomposable. En particulier, pour tout paramètre  $t \in T$ , le fibré vectoriel  $E_t$  est décomposable en somme directe de deux sous-fibrés en droites distincts, ceux correspondant à  $s_0^1$  et  $s_0^2$ . Par conséquent, le degré de stabilité du fibré vectoriel sous-jacent à la déformation isomonodromique universelle est constant et vaut

$$k_0 = \min\{s_0^1 \cdot s_0^1, s_0^2 \cdot s_0^2\}.$$

En particulier, si le fibré à connexion initial est le fibré trivial muni de la connexion triviale, alors le degré de stabilité du fibré vectoriel sous-jacent à la déformation isomonodromique universelle est constant et vaut 0.

*Nous pouvons conclure que tout fibré vectoriel générique sous-jacent à la déformation isomonodromique d'un fibré à connexion de rang 2 et sans trace (éventuellement réductible)  $(E_0, \nabla_0)$  est «maximalement» stable si, et seulement si tout*

sous-fibré en droites  $L_0$  de  $E_0$  invariant par  $\nabla_0$  satisfait

$$\deg \det(E_0) - 2\deg L_0 \geq g.$$

Nous pouvons alors construire facilement des exemples de fibrés à connexion réductible initiaux  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  de rang 2 et sans trace, tels que le fibré vectoriel sous-jacent ne soit pas «maximalement» stable le long de la déformation isomonodromique universelle. Il suffit en effet que  $E_0$  possède un sous-fibré en droites  $L_0$  qui est invariant par  $\nabla_0$  et tel que

$$-2\deg L_0 < g - 1.$$

**Exemple 4.7** Soit  $\rho : \pi_1(X_0) \rightarrow \text{Aff}(\mathbf{C})$  une représentation, où

$$\text{Aff}(\mathbf{C}) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbf{C}^*, \mu \in \mathbf{C} \right\}.$$

Alors la correspondance de Riemann-Hilbert nous fournit un fibré à connexion non singulière sur  $X_0$ , de monodromie  $\rho$ , qui possède un fibré en droites invariant  $L_0$ . En particulier, le fibré en droites  $L_0$  peut être muni d'une connexion non singulière. Cela implique  $\deg L_0 = 0$  (cf. [Wei38]). Pour  $g \geq 2$ , nous avons ainsi construit un exemple de fibré à connexion initial dont le fibré vectoriel sous-jacent à la déformation isomonodromique universelle n'est pas «maximalement» stable.

**Exemple 4.8** Soit  $(E_0, \nabla_0)$  un fibré à connexion réductible de type  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ , et notons  $L_0$  un sous-fibré en droites de  $E_0$  invariant par  $\nabla_0$ . On peut supposer la classe d'Euler du fibré en droites  $L_0$  arbitrairement grande, quitte à appliquer certaines transformations de jauge méromorphes qui fixent  $L_0$ . Ces transformations de jauge méromorphes se décomposent en un nombre pair de transformations élémentaires de Gabber, qui sont étudiées dans la section A.2.4 de l'annexe, et une renormalisation afin d'obtenir un fibré  $\tilde{E}_0$  de degré 0. Pour tout entier  $k$  nous obtenons ainsi des exemples de fibrés à connexion réductibles tels que le degré de stabilité du fibré vectoriel sous-jacent à la déformation isomonodromique universelle est inférieur à  $k$  pour tout paramètre.

#### 4.3.4 Le cas avec trace

Dans l'énoncé du théorème 4.2, nous demandons à ce que le fibré à connexion initial  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  soit sans trace, pour pouvoir utiliser notre construction de

déformation isomonodromique universelle. Dans le cas résonant, c'est-à-dire s'il existe un pôle dont les valeurs propres de la partie la plus polaire de la matrice de connexion diffèrent par un entier, nous n'avons pas de définition générale d'une déformation isomonodromique. Nous allons voir dans la preuve du théorème suivant, que notre construction de la déformation isomonodromique universelle dans le cas sans trace induit une certaine déformation isomonodromique dans le cas avec trace au sens usuel, si le fibré à connexion n'est pas résonant. En utilisant le fait que le degré de stabilité ne dépend que du fibré à connexion projectivisé, et ne dépend donc pas de la trace, nous pouvons démontrer le théorème suivant.

**Théorème 4.9** *Soit  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  un fibré à connexion irréductible de rang 2 (éventuellement avec trace) sur une surface de Riemann  $X_0$ , qui est non résonant. Alors le fibré  $E_0$  est «maximalement» stable, à une déformation isomonodromique arbitrairement petite près.*

**Démonstration :** La méthode de la construction de la déformation isomonodromique universelle d'un fibré à connexion de rang 2 sans trace se généralise de manière immédiate en une construction de la déformation isomonodromique universelle d'un fibré à connexion de rang 2 projectivisé  $(\mathbf{P}(E_0) \rightarrow X_0, \mathbf{P}(\nabla_0)) = (P_0 \rightarrow X_0, \mathcal{F}_0)$ . Notons cette déformation universelle  $(P_t \rightarrow X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$ , respectivement  $(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{F})$ . Elle possède également toutes les propriétés citées dans le paragraphe 4.3.1. La preuve du théorème principal s'applique alors, et nous obtenons que pour tout paramètre  $t \in T$  générique, et tout fibré vectoriel  $E_t \rightarrow X_t$  de rang 2 tel que  $\mathbf{P}(E_t) = P_t$ , le fibré vectoriel  $E_t$  est «maximalement» stable.

Quitte à restreindre l'espace des paramètres  $T$  à un voisinage suffisamment petit du paramètre initial, le feuilletage de Riccati  $(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{F})$  se relève en un fibré à connexion plate  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  qui est localement constant, et dont la restriction au paramètre initial est le fibré à connexion initial  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$ .

Nous pouvons ainsi construire une déformation localement constante  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  du fibré à connexion initial  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$ , telle que le fibré vectoriel  $E_t$  est génériquement «maximalement» stable. Bien que la condition d'être localement constant ne soit pas nécessaire dans la définition, il s'agit d'une déformation isomonodromique au sens usuel (dans le cas non résonant).  $\square$

**Remarque 4.10** *Si la courbe  $X_0$  est la sphère de Riemann, alors un fibré vectoriel  $E_0 \rightarrow X_0$  de rang 2 est «maximalement» stable si et seulement s'il est de la*

forme

$$\begin{cases} \mathcal{O}(k) \oplus \mathcal{O}(k) & \text{si } \deg(\det(E_0)) \text{ est pair} \\ \mathcal{O}(k) \oplus \mathcal{O}(k-1) & \text{sinon .} \end{cases}$$

Nous remarquons qu'un tel fibré est semi-stable dans le premier cas uniquement.

## 4.4 Applications

### 4.4.1 Structures projectives branchées

Grâce à l'interprétation en termes de feuilletages de Riccati, le théorème 4.2 fournit une application directe pour les structures projectives branchées. Ceci est expliqué dans l'introduction de l'article en annexe.

### 4.4.2 Forme normale de Birkhoff pour les singularités irrégulières

Le théorème 4.2 peut être appliqué également dans l'étude locale des singularités irrégulières. Soit  $\nabla_0$  une connexion irréductible sur le fibré trivial de rang  $r$  sur le germe  $(\mathbf{C}, 0)$ , avec un pôle d'ordre  $l$  en  $x = 0$ . Soit  $M_0 \in \mathrm{GL}(r, \mathbf{C})$  sa monodromie autour de 0. Il existe alors une matrice constante  $A_{-1} \in \mathfrak{gl}(r, \mathbf{C})$  telle que

$$M_0 = \exp(2i\pi A_{-1}). \quad (4.8)$$

Les valeurs propres de la matrice  $A_{-1}$  sont déterminées par les valeurs propres de la matrice  $M_0$ , à des entiers près. Soit  $\nabla_\infty$  la connexion fuchsienne sur le fibré trivial de rang  $r$  sur  $\mathbf{C}$ , qui est donnée par le système  $dY = -\frac{A_{-1}}{\tilde{x}} Y d\tilde{x}$ . En identifiant  $\tilde{x} = \frac{1}{x}$ , nous pouvons recoller ces deux fibrés à connexion (de manière unique) en un fibré à connexion  $(E, \nabla)$  sur  $\mathbf{P}^1$ , avec un pôle d'ordre  $l$  en 0, et un pôle simple en  $\infty$ . En effet, les deux fibrés à connexion sont non singuliers sur  $\mathbf{C} \setminus \{0\}$  et possèdent la même représentation de monodromie. Selon un théorème de A. Bolibruch (*cf.* [AB94], voir aussi [IY08], page 354), le fibré vectoriel  $E \rightarrow \mathbf{P}^1$  ainsi construit est isomorphe au fibré trivial  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^r$  pour un bon choix des valeurs propres de la matrice  $A_{-1}$  dans (4.8). Plus précisément, le fibré vectoriel  $E$  est trivial à une transformation de jauge méromorphe sur  $(\mathbf{P}^1, \infty)$  près qui se décompose en un nombre fini de transformations élémentaires au-dessus de l'infini.

Or si  $\nabla$  est une connexion sur le fibré trivial  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^r$  qui possède un pôle d'ordre  $l$  en 0 et un pôle simple à l'infini, alors sa matrice de connexion  $A$  sur  $\mathbf{C}$

possède la *forme normale de Birkhoff* :

$$A = \frac{1}{x^l} A_{-l} + \dots + \frac{1}{x} A_{-1}, \quad (4.9)$$

où  $A_{-1}, \dots, A_{-l}$  sont des matrices constantes. Au voisinage de  $\tilde{x} = \frac{1}{x} = 0$ , la matrice de connexion est alors  $A(\tilde{x}) = -\frac{A_{-1}}{\tilde{x}} d\tilde{x}$ . Nous avons alors :

**Théorème 4.11 (Bolibruch)** *Soit  $\nabla_0$  une connexion irréductible sur le fibré trivial  $E_0$  de rang  $r$  sur  $(\mathbf{C}, 0)$ . Alors il existe une transformation de jauge holomorphe  $(x, Y) \mapsto (x, \phi(x)Y)$  sur  $E_0$ , telle que la matrice de connexion obtenue  $A$  possède la forme normale de Birkhoff (4.9).*

Considérons maintenant le cas de rang 2 et sans trace. Pour tout choix de la matrice  $A_{-1} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  satisfaisant (4.8), le fibré vectoriel  $E$  sous-jacent au fibré à connexion  $(E, \nabla)$  construit comme ci-dessus est trivial d'après le théorème A.1, à une déformation isomonodromique près. De plus, cette déformation isomonodromique peut être choisie arbitrairement petite. Or une déformation isomonodromique du fibré à connexion  $(E, \nabla)$  avec deux pôles d'ordre  $l$  et 1 respectivement revient à faire un changement de coordonnées  $(x, Y) \mapsto (\varphi(x), Y)$  au voisinage de 0 dans  $\mathbf{P}^1$ , et recoller via l'identification  $\tilde{x} = \frac{1}{\varphi(x)}$ . Autrement dit, nous avons le corollaire suivant du théorème A.1 :

**Corollaire 4.12** *Soit  $\nabla_0$  une connexion irréductible sans trace sur le fibré trivial  $E_0$  de rang 2 sur  $(\mathbf{C}, 0)$ . Soient  $\lambda^{\pm 1}$  les valeurs propres de sa matrice de monodromie  $M_0$ . Alors pour tout choix de valeurs  $\pm\theta$  telles que  $e^{\pm\theta 2i\pi} = \lambda^{\pm 1}$ , il existe une transformation de jauge et de coordonnées holomorphe  $(x, Y) \mapsto (\varphi(x), \phi(x)Y)$  sur  $E_0$ , telle que la matrice de connexion obtenue  $A$  possède la forme normale de Birkhoff (4.9), où les valeurs propres de la matrice  $A_{-1}$  sont  $\pm\theta$ . Ici, la transformation de coordonnées  $\varphi$  peut être choisie arbitrairement proche de l'identité.*

## 4.5 Exemple explicite

Considérons la connexion suivante sur le fibré trivial sur  $\mathbf{P}^1$

$$dY = \begin{pmatrix} -\frac{\theta}{2x} & 0 \\ 0 & \frac{\theta}{2x} \end{pmatrix} Y dx, \quad (4.10)$$



où  $\theta$  est un nombre complexe différent de 0 et 1. Ce système possède deux pôles  $(0, \infty)$  avec résidus  $\pm \frac{\theta}{2}$ . Effectuons la transformation de jauge méromorphe suivante

$$\tilde{Y} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-t)}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y. \quad (4.11)$$

Nous obtenons alors un nouveau fibré à connexion sur  $\mathbf{P}^1$ , qui a deux pôles simples supplémentaires en 1 et  $t$  avec résidus respectifs  $\pm \frac{1}{2}$ . La matrice de connexion  $A$  ainsi construite est diagonale à l'infini et sa partie en  $dx$  s'écrit

$$\frac{dx}{x} \begin{pmatrix} -\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + \frac{\frac{(1-t)}{(1-s)^2} dx}{x(x-1)(x-t)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1-s^2)x + \theta s(1-t) & -(\theta-1)(1-s)x + \theta(t-s) \\ -(\theta+1)s(1-s)x + \theta s(1-st) & \frac{1}{2}(1-s^2)x - \theta s(1-t) \end{pmatrix}.$$

Cette famille de connexions, dépendant de  $s$  et du paramètre  $t \in \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ , définit une déformation isomonodromique (paramétrée par le revêtement universel  $\pi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ ) si, et seulement si  $s(t) = c \exp(\theta \log(t))$ , où  $c$  est une constante. Cela provient du fait que le feuilletage obtenu par la transformation méromorphe (4.11) doit rester localement constant. Notamment, les singularités projectivement apparentes doivent rester dans une même feuille le long de la déformation projectivée.

Le zéro du coefficient  $(1, 2)$  de la matrice de connexion  $A$  est la solution

$$q(t) = \frac{\theta}{\theta-1} \frac{t-s}{1-s}$$

de l'équation de Painlevé (1) avec les coefficients

$$(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) = (\theta, 1, 1, \theta-1).$$

Selon (4.1), le degré de stabilité d'un fibré vectoriel sous-jacent à un fibré à connexion de rang 2 sans trace avec quatre pôles simples sur  $\mathbf{P}^1$  est, soit  $-2$ , soit  $0$ . Calculons maintenant l'ensemble exceptionnel  $T_{-2}$  des paramètres dont le fibré vectoriel associé n'est pas trivial, c'est-à-dire non «maximalement» stable.

Rappelons que notre espace des paramètres est  $T = \mathbf{H}$ . Pour un paramètre  $\tilde{t} \in \mathbf{H}$ , le fibré vectoriel  $E_{\tilde{t}}$  sous-jacent à la déformation isomonodromique universelle  $(E_{\tilde{t}} \rightarrow \mathbf{P}^1, \nabla_{\tilde{t}})_{\tilde{t} \in \mathbf{H}}$  construite ci-dessus est trivial si et seulement si la matrice de transformation de jauge méromorphe (4.11) est de rang 2. Nous en déduisons

$$T_{-2} = \{\tilde{t} \in \mathbf{H} \mid c \cdot \exp(\theta \cdot \log(\pi(\tilde{t}))) = 1\}.$$

Nous remarquons que cet ensemble est bien un sous-ensemble analytique fermé de  $T$ , conformément au théorème 4.2. Grâce à cet exemple nous voyons par contre que les ensembles  $T_k$  du théorème ne sont pas des sous-ensembles algébriques en général.

## Chapitre 5

# Perspectives

### a) Construction de la déformation isomonodromique universelle

Rappelons que la définition usuelle d'une déformation isomonodromique concerne les fibrés à connexion non résonante uniquement. Dans ce cadre, et en tout rang, les constructions des déformations isomonodromiques universelles existent dans la littérature. De plus, il existe une construction par B. Malgrange pour le cas où la partie la plus polaire de la matrice de connexion ne possède qu'un seul bloc de Jordan par valeur propre.

Dans cette thèse, nous ne considérons que des fibrés de rang 2 à connexion sans trace. Ceci nous permet d'utiliser notre approche géométrique élémentaire, qui englobe le cas résonant de manière naturelle. Or la condition d'être localement constant dans la définition d'une déformation isomonodromique n'est plus valable dans un cadre plus général.

Il serait intéressant de trouver une définition plus générale des déformations isomonodromiques, qui donne lieu à des déformations isomonodromiques universelles cohérentes dans le cas résonant (*cf.* question (3.4) dans [Mal83b], page 437).

### b) Stabilité du fibré sous-jacent à une déformation isomonodromique

Nous ne savons pas pour l'instant si un équivalent du théorème 4.2 est valable pour des fibrés à connexion de rang supérieur à 2. S'il est vrai, les méthodes de démonstration seront probablement très différentes et moins élémentaires que celles utilisées ici. De plus, il faudrait trouver une généralisation convenable de la notion de degré de stabilité. Éventuellement, il faudrait examiner seulement la semi-stabilité.

Une autre question intéressante en lien avec le théorème 4.2 est de savoir si

les fibrés «maximalement» stables se distinguent par une propriété géométrique dans l'ensemble des fibrés stables, par exemple du point de vue des représentations unitaires irréductibles (*cf.* [NS64]).

De plus, nous aimerions savoir s'il est possible de caractériser les fibrés à connexion dont le fibré vectoriel sous-jacent à la déformation isomonodromique universelle est «maximalement» stable pour tout paramètre  $t \in T$ .

Il serait très intéressant de trouver une «fonction  $\tau$ » pour notre déformation isomonodromique universelle, qui indique les paramètres dont le fibré vectoriel associé n'est pas «maximalement» stable. Des fonctions  $\tau$  ont été décrites par K. Okamoto dans [Oka81] pour les équations de Painlevé et par B. Malgrange dans [Mal04] pour les équations de Schlesinger, donc pour certaines déformations isomonodromiques en genre 0.

## Annexe A

# Isomonodromic deformations and maximally stable bundles

### A.1 Introduction

#### A.1.1 Result

We consider a meromorphic and tracefree connection  $\nabla_0$  on a holomorphic rank 2 vector bundle  $E_0$  over a compact Riemann surface  $X_0$  of genus  $g$ . In local trivialization charts for  $E_0$ , the connection  $\nabla_0$  is defined by  $d - A_0$ , where  $A_0$  is a  $2 \times 2$ -matrix whose entries are meromorphic 1-forms such that  $\text{tr}(A_0) \equiv 0$ . Such a connection  $(E_0, \nabla_0)$  will be considered up to holomorphic gauge-transformations of the vector bundle. The precise definitions of connections, isomonodromic deformations and related notions we shall use are recalled in section A.2.

Roughly speaking, an isomonodromic deformation of  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  is an analytic, topologically trivial deformation  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  such that the monodromy data are constant. By topologically trivial deformation we mean that the associated family  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow T$  of Riemann surfaces with fiber  $\pi^{-1}(t) = X_t$  is topologically trivial, whose parameter space  $T$  is contractile and which is provided with smooth disjoint sections  $\mathcal{D}^i : T \rightarrow \mathcal{X}$  for  $i \in \{1, \dots, m\}$ , which correspond to the polar locus of the family of connections. In the non-singular or logarithmic case (poles of order 1), the monodromy data reduce to the monodromy representation  $\pi_1(X_0 \setminus D_0) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{C})$ , where  $D_0$  is the polar locus of the initial connection. In this case, a deformation  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  of the curve, the fibre bundle and the connection is called isomonodromic if it is induced by a flat logarithmic connection  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$ . In the general meromorphic case (poles of arbitrary order), one usually adds Stokes matrices to the monodromy data (see papers of B. Malgrange,

J. Palmer and I. Krichever), therefore needing a non-resonance condition. In the non-resonant case, a deformation  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  is called isomonodromic (and iso-Stokes) if the order of the poles is constant along the deformation, and if it is induced by a flat meromorphic connection over  $\mathcal{X}$  whose connection matrix  $A$  satisfies

$$(dA)_\infty \leq (A)_\infty, \quad (\text{A.1})$$

where  $(\cdot)_\infty$  denotes the (effective) polar divisor. If  $(x_1, \dots, x_N)$  are local coordinates in which the polar locus is given by  $\{x_1 = 0\}$ , then condition (A.1) means that the connection matrix  $A$  takes the form

$$A = M_1 \frac{dx_1}{x_1^l} + \sum_{i=2}^N M_i \frac{dx_i}{x_1^{l-1}},$$

where  $M_i$ , for  $i \in \{1, \dots, N\}$ , is a matrix whose entries are holomorphic functions, and  $l$  is the order of the pole. If the order of the poles is constant, then it turns out (see section A.2.3) that, in the  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ -case, condition (A.1) is equivalent to the existence of local coordinates in which the connection is gauge-equivalent to a constant one :

$$A = M_1(x_1) \frac{dx_1}{x_1^l}.$$

We shall use this point of view, which is specific to the  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ -case, and which enables us to include the  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ -resonant case in a natural way.

The first part of this thesis is devoted to the construction of the global universal isomonodromic deformation  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  over  $\mathcal{X} \rightarrow T$  of the initial connection. In the non-singular or logarithmic case, the parameter space  $T$  is the Teichmüller space  $\mathcal{T}$  associated to the punctured curve  $X_0^*$  (where punctures are poles of  $\nabla_0$ ) and  $(\mathcal{E}, \nabla)$  is the unique flat logarithmic extension of  $(E_0, \nabla_0)$  over the universal Teichmüller curve of marked punctured Riemann surfaces associated to  $X_0^*$ . In the case of multiple poles, there exist non-trivial isomonodromic deformations of the initial connection, which are fixing the curve and the poles. In the general case, the parameter space  $T$  of the universal isomonodromic deformation is the product of the Teichmüller space  $\mathcal{T}$  of the curve minus the poles, with spaces of convenient jets of diffeomorphisms at the poles. The dimension of this parameter space  $T$  is

$$3g - 3 + n, \quad (\text{A.2})$$

where  $n$  is the number of poles counted with multiplicity. This construction, as well as the proof of its universal property will be carried out in section A.3.

Such a construction has been done in the non-resonant case for arbitrary rank,

using Birkhoff normal form and Stokes matrices, in [Mal83a] (see also [Mal04]), [Mal83b] and [Pal99], for  $g = 0$ , and in [Kri02], for  $g \geq 0$ . Our construction does not use Stokes analysis, and is in this sense more elementary, but clearly iso-Stokes in the non-resonant case. In [Mal86] and [Mal96], B. Malgrange gave also a construction of a germ of a universal isomonodromic deformation for resonant singularities, if the leading term of the connection matrix has only one Jordan block for each eigenvalue. In the  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ -case, each resonant singularity is clearly of that type. Our elementary approach allows the construction of a global universal isomonodromic deformation even in the resonant case. Another possible approach, that we omit in this work, is the Kodaira-Spencer method. After projectivization of the fibre bundle  $\mathcal{E}$ , the flat connection  $\nabla$  defines a codimension 1 equisingular unfolding on  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  in the sense of [Mat91], [MN94]. The obstruction space is given by  $H^1(X_0, \Theta_{X_0}(D_0))$ , where  $D_0$  is the effective polar divisor of  $\nabla_0$  and  $\Theta$  is the sheaf of holomorphic vector bundles. The dimension of  $\Theta_{X_0}(D_0)$  is  $3g - 3 + \deg(D_0)$  (cf. [GM89], page 196). The main result of [MN94] insures the existence of a local Kuranishi space. This is a germ of our parameter space.

The second part of this thesis is devoted to the stability of the vector bundle underlying a "generic" irreducible meromorphic rank 2 connection with given monodromy data over a genus  $g$  Riemann surface. More precisely, we examine the stability of the underlying vector bundle  $E_t$  along the universal isomonodromic deformation  $(E_t, \nabla_t)_{t \in T}$  of the initial connection. We define the *degree of stability*  $\kappa(E)$  of a rank 2 bundle  $E$  on a Riemann surface  $X$  as

$$\kappa(E) = \min\{\deg(E) - 2\deg(L) \mid L \text{ sublinebundle of } E\}.$$

When  $\kappa(E) > 0$  (resp.  $\kappa(E) \geq 0$ ), the bundle  $E$  is called *stable* (resp. *semi-stable*). According to M. Nagata in [Nag70], the degree of stability is upperly bounded by the genus  $g$  of  $X$ . When  $\kappa(E) = g$  or  $g - 1$ , the bundle  $E$  is called *maximally stable*. If  $E$  admits a meromorphic connection  $\nabla$  with  $n$  poles which is *irreducible*, i.e. that  $E$  has no  $\nabla$ -invariant sublinebundle  $L$ , then we have

$$2 - 2g - n \leq \kappa(E) \leq g,$$

where the first inequality is implied by formula (A.22), due to M. Brunella (see section A.5.2). Note that  $\kappa(E)$  is even if  $E$  admits a tracefree meromorphic connection. In section A.5 we will prove the following main theorem of this thesis.

**Theorem A.1** *Consider the universal isomonodromic deformation*

$$(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$$

of an irreducible tracefree meromorphic rank 2 connection  $(E_0, \nabla_0)$  over  $X_0$ . Then the vector bundle underlying a generic connection along this deformation is maximally stable. More precisely, for each integer  $k$ , the set

$$T_k = \{t \in T \mid \kappa(E_t) \leq k\}$$

is a closed analytic subset of  $T$  of codimension at least  $g - 1 - k$ .

In particular, the vector bundle underlying a (non trivial) isomonodromic deformation of a *non-singular* irreducible  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -connection on a Riemann surface of genus  $g \geq 2$  is generically stable.

**Corollary A.1** *Let  $(E_0, \nabla_0)$  be an irreducible tracefree meromorphic rank 2 connection over  $\mathbf{P}^1$ . Denote by  $E_t$  the vector bundle associated to the parameter  $t \in T$  in the universal isomonodromic deformation of  $(E_0, \nabla_0)$ . Recall that such a vector bundle is of the form  $E_t \cong \mathcal{O}(\frac{1}{2}\kappa(E_t)) \oplus \mathcal{O}(-\frac{1}{2}\kappa(E_t))$ . Then for a generic parameter  $t \in T$ , the vector bundle  $E_t$  is the trivial one :*

$$E_t = \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}.$$

This corollary has been proved for some logarithmic resonant connections by A. Bolibruch in [Bol90]<sup>1</sup>. The above result is thus a generalization of a theorem of A. Bolibruch in the spirit of [EV99] and [EH01].

We will give an explicit example of an isomonodromic deformation in section A.4, where the exceptional set (called  $\Theta$ -divisor in [Mal04]) is explicitly given. In section A.6, we will weaken the conditions of irreducibility and tracefreeness in theorem A.1. Namely we will state a sharper version of this result, dealing also with reducible connections, in section A.6.1.

### A.1.2 Applications

#### a) Isomonodromy equations

Let  $(E_0, \nabla_0)$  be an irreducible tracefree rank 2 connection with four poles on  $\mathbf{P}^1$ , where  $E_0$  is the trivial bundle  $\mathbf{P}^1 \times \mathbb{C}^2$ . The solutions of the Painlevé equations II-VI describe universal isomonodromic deformations  $(E_t, \nabla_t)_{t \in T}$  of such initial systems  $(E_0, \nabla_0)$ . According to corollary A.1, any universal

---

<sup>1</sup>On page 37, A. Bolibruch stated that if  $(E_0, \nabla_0)$  is an irreducible logarithmic rank 2 connection, with at least 4 poles and such that none of its monodromy matrices is diagonalizable and  $E_0$  is a non-maximally stable bundle, then one can choose one pole  $a_i$  such that the degree of stability of the underlying vector bundle can be increased by a small move of  $a_i$  in  $\mathbf{P}^1$ , keeping the monodromy constant.



isomonodromic deformation of a tracefree rank 2 connection with four poles on  $\mathbf{P}^1$  contains connections  $(E_t, \nabla_t)$  which are actually *systems*, *i.e.* whose underlying vector bundles are trivial. In fact this is the case for each generic parameter. Now the universal isomonodromic deformation of  $(E_0, \nabla_0)$  is also the universal isomonodromic deformation of each of the connections  $(E_t, \nabla_t)$  it contains for a parameter  $t \in T$ . By consequence, the universal isomonodromic deformation of  $(E_0, \nabla_0)$  occurs as a solution of the associated Painlevé equation (see section A.4). Of course this result remains true for general Schlesinger equations, which describe isomonodromic deformations of tracefree Garnier systems, see [IKSY91]. More generally, if we want to find explicit isomonodromy equations for genus  $g \geq 0$ , it is convenient to restrict ourselves to the space of semi-stable vector bundles, permitting to resort to a consistent moduli theory. According to theorem A.1, this is a natural way of proceeding.

#### b) Branched projective structures

Let  $X$  be a compact Riemann surface. The degree of stability of a rank 2 bundle  $E \rightarrow X$  depends only on the projective bundle  $\mathbf{P}(E) \rightarrow X$ , and it can be identified to the minimal self-intersection number of sections of this latter bundle. Indeed, let  $L$  be a sublinebundle of  $E$  over  $X$  and let  $\sigma$  be the associated section of the projective bundle  $\mathbf{P}(E)$ . We then have

$$\deg(\det(E)) - 2\deg(L) = \sigma \cdot \sigma, \quad (\text{A.3})$$

where  $\sigma \cdot \sigma$  is the *self-intersection number* of  $\sigma$  (see [Mar70], page 11).

Theorem A.1 remains valid at the level of projective connections. The proof, given in section A.5 will actually be based on projective connections. Recall that the analytic continuations of local solutions of a projective connection  $(E, \nabla)$  are defining the leaves of a *Riccati foliation*  $(P, \mathcal{F})$  on the ruled surface  $P = \mathbf{P}(E)$ . These foliations are studied thoroughly in [Bru04].

A *projective structure* on a given Riemann surface  $X$  of genus  $g$  is an atlas of charts in  $\mathbf{P}^1$ , whose transition maps are Möbius transformations. Equivalently, it can be defined by a Riccati foliation on a  $\mathbf{P}^1$ -bundle  $P \rightarrow X$  together with a section  $\sigma : X \rightarrow P$  transverse to the foliation. To obtain an element of the equivalence class of the associated atlas, an arbitrary fibre of  $P$  can be chosen and projection on this fibre along the leaves of the foliation will define the local charts. This construction is also called an  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ -oper (see [BD05], page 12).

If one allows tangencies between  $\sigma$  and the foliation, the coordinate maps may become non-conformal. In this way, one gets branch points for the

projective structure. The number of branch points is the number of tangencies between the section  $\sigma$  and the foliation. There are  $\sigma \cdot \sigma + 2g - 2$  such tangencies (see formula (A.22)). If  $\kappa$  is the minimal self-intersection number of sections of the bundle  $P$ , then each branched projective structure defined by a Riccati foliation on  $P$  has at least  $\kappa + 2g - 2$  branch points. Each projective structure on  $X$  provides a monodromy representation  $\rho : \pi_1(X \setminus B) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$ , where  $B$  is the branch locus on  $X$ . Yet in each branch point, the local monodromy is trivial so that we rather consider the simplified monodromy representation  $\rho' : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$ , which can be identified with the monodromy representation of the Riccati foliation. Now fix a representation  $\rho' : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{PSL}(2, \mathbf{C})$ . According to the Riemann-Hilbert correspondence, there is a unique non-singular Riccati foliation  $(P \rightarrow X, \mathcal{F})$  associated to  $\rho'$ . Since the minimal self-intersection number for sections of  $P$  is less or equal to  $g$  according to M. Nagata, we have the following result.

**Proposition A.2** *There is a branched projective structure on  $X$  with simplified monodromy  $\rho'$  having at most  $3g - 2$  branch points, where  $g$  is the genus of the compact Riemann surface  $X$ .*

As a corollary of theorem A.1 we now obtain the following theorem.

**Corollary A.3** *If  $\rho'$  is irreducible and  $X$  is a generic point in the Teichmüller space  $\mathrm{Teich}(g)$ , then each branched projective structure on  $X$  with simplified monodromy  $\rho'$  has at least  $3g - 3$  branch points.*

**Remark A.4** *The minimal number of branch points on a generic curve  $X$  here is either  $3g - 2$  or  $3g - 3$ , depending on the parity of the genus  $g$ . More exactly, the number of branch points is even, if the simplified monodromy representation  $\rho'$  lifts to a representation  $\tilde{\rho}' : \pi_1(X) \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ , and odd otherwise.*

## A.2 Definitions and elementary properties

In the following, we shall always denote by  $M$  a complex manifold and by  $X$  a compact Riemann surface. We denote by  $\mathcal{O}$  the sheaf of holomorphic functions on  $M$  (resp.  $X$ ) and by  $\Omega \otimes \mathcal{M}$  the sheaf of meromorphic 1-forms on  $M$  (resp.  $X$ ).

### A.2.1 Flat meromorphic connections and monodromy

Let  $E$  be a holomorphic rank  $r$  vector bundle over  $M$ . The bundle  $E$  is given by a trivialization atlas  $(U_i)$  on  $M$  with transition maps  $\varphi_{ij}$ , providing trivialization charts  $U_i \times \mathbf{C}^r$  with local coordinates  $(z_i, Y_i)$ , and transition maps  $(\Phi_{ij}) = (\varphi_{ij}, \phi_{ij})$  satisfying

$$(z_i, Y_i) = (\varphi_{ij}(z_j), \phi_{ij}(z_j) \cdot Y_j),$$

where  $\phi_{ij} \in \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$ . Later on, we also denote by  $E$  the global space of the vector bundle.

A *meromorphic connection*  $\nabla$  on  $E$  associates to each trivialization chart  $U_i \times \mathbf{C}^r$  of  $E$  with coordinates  $(z_i, Y_i)$  a system

$$dY_i = A_i(z_i) \cdot Y_i \tag{A.4}$$

with  $A_i \in \mathfrak{gl}(2, \Omega \otimes \mathcal{M}(U_i))$ , such that the *connection matrices*  $A_i$  glue together by means of the transition maps  $(\Phi_{ij})$  :

$$A_i \circ \varphi_{ij} = \phi_{ij} A_j \phi_{ij}^{-1} + d\phi_{ij} \phi_{ij}^{-1}.$$

A biholomorphic *coordinate transformation*  $\tilde{z}_i = \varphi_i(z_i)$  in the local coordinates of  $M$  conjugates the connection matrix  $A_i(z_i)$  to

$$\tilde{A}_i(\tilde{z}_i) = \varphi_i^* A_i(\tilde{z}_i).$$

On the other hand, a holomorphic *gauge transformation*  $\tilde{Y}_i = \phi_i(z_i) Y_i$  with  $\phi_i \in \mathrm{GL}(r, \mathcal{O}(U_i))$  on a local chart  $U_i$  conjugates system (A.4) to  $d\tilde{Y}_i = \tilde{A}_i(z_i) \tilde{Y}_i$  with

$$\tilde{A}_i = \phi_i A_i \phi_i^{-1} + d\phi_i \phi_i^{-1}.$$

In this article, connections shall be considered modulo holomorphic *gauge-coordinate transformations*, *i.e.* combination of coordinate and gauge transformations. Two connection over the same base curve  $M$  are called *isomorphic*, if, with respect to a common atlas of the base curve, their connection matrices are conjugated by holomorphic gauge transformations.

The poles of the matrices  $A_i$  are the *poles* of the connection  $\nabla$ . They do not depend on the chart, and the *polar divisor*  $(\nabla)_\infty$  is well defined. We shall denote by  $D$  the *reduced polar divisor*. The connection  $\nabla$  is said to be a *non-singular* (resp. *logarithmic*) connection if it has no poles (resp. if it has only simple poles and its connection matrices  $A_i$  satisfy  $(dA_i)_\infty \leq (A_i)_\infty$ ).

A connection is *flat* or *integrable*, if the connection matrices  $A_i$  satisfy  $dA_i \equiv A_i \wedge A_i$ . Equivalently, a connection is flat if each non-singular point has a small

neighborhood such that there is a gauge transformation  $(z, \tilde{Y}) = (z, \phi(z) \cdot Y)$  which conjugates the connection matrix to the trivial connection matrix  $\tilde{A}_i = 0$ . We can choose a *fundamental solution*  $S$ , that is a basis of the space of local solutions in some base point in the set of non-singular points  $M^* = M \setminus D$ . Then analytic continuation along a closed path  $\gamma$  in the set of non-singular points provides another fundamental solution  $S' = \rho^{-1}(\gamma)S$ , where  $\rho(\gamma)$  is called the *monodromy* along the path  $\gamma$ . In that way we get a *monodromy representation*  $\rho : \pi_1(M^*) \rightarrow \text{GL}(r, \mathbf{C})$  which will be considered modulo conjugacy of the image of  $\rho$  by an element of  $\text{GL}(r, \mathbf{C})$ .

Each meromorphic rank  $r$  connection  $\nabla$  on  $E$  induces a *trace connection*  $\text{tr}(\nabla)$  on the line bundle  $\det(E)$ , given by

$$dy_i = \text{tr}(A_i(z_i)) \cdot y_i.$$

We say a connection is *tracefree*, if its trace connection is the trivial connection  $dy = 0$  on the trivial line bundle  $M \times \mathbf{C}$ . For tracefree connections, it is possible to choose transition maps with  $\phi_{ij} \in \text{SL}(r, \mathcal{O}(U_i \cap U_j))$ . Thus for tracefree connections we will only consider gauge transformations  $\phi_i$  in  $\text{SL}(r, \mathcal{O}(U_i))$ .

Let  $\nabla$  be a connection on a rank 2 vector bundle  $E$  over some Riemann surface  $X$  defined by systems (A.4) and let  $\zeta$  be a connection on a line bundle  $L$  with cocycle  $\lambda_{ij}$  on a common atlas of  $X$ , locally defined by

$$dy_i = a_i(z_i)y_i$$

with  $a_i \in \Omega \otimes \mathcal{M}(U_i)$ . Then the *tensor product*

$$(L, \zeta) \otimes (E, \nabla)$$

provides a connection on the bundle  $L \otimes E$  with cocycle  $(\lambda_{ij} \cdot \phi_{ij})$ , locally defined by the systems

$$d\tilde{Y}_i = (A_i + a_i I)\tilde{Y}_i.$$

**Lemma A.5** *There is a rank 1 connection  $(L, \zeta)$  such that  $(L, \zeta) \otimes (E, \nabla)$  is tracefree if, and only if, the degree of stability  $\kappa(E)$  of  $E$  has even parity.*

**Proof:** If  $\kappa(E)$  is even, then the degree of the line bundle  $\det(E)$  is even. Thus there is a line bundle  $L$  on  $X$  such that  $L^{\otimes 2} = \det(E)$ . This line bundle admits a connection given in trivialization charts by

$$dy_i = -\frac{1}{2}\text{tr}(A_i)y_i.$$

If  $\kappa(E)$  is odd, then for each line bundle  $L$  on  $X$  the degree of the tensor product  $\deg(\det(L \otimes E)) = 2\deg L + \deg(\det(E))$  remains odd.  $\square$

### A.2.2 Projective connections and Riccati foliations

Let  $E$  be a rank 2 vector bundle on  $X$ . To each meromorphic connection  $(E, \nabla)$  on  $E$  we may associate a *projective connection*  $(\mathbf{P}(E), \mathbf{P}(\nabla))$  on the  $\mathbf{P}^1$ -bundle  $\mathbf{P}(E)$ . Let

$$dY = A(x) \cdot Y \quad \text{with} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$$

be a system defining  $\nabla$  on a certain trivialisation chart  $U \times \mathbf{C}^2$ . Then for the coordinates  $(x, y)$  of  $U \times \mathbf{P}^1$  with  $y = \frac{y_2}{y_1}$  we get

$$\begin{aligned} dy &= \frac{y_1 dy_2 - y_2 dy_1}{(y_1)^2} = \frac{y_1(cy_1 + dy_2) - y_2(ay_1 + by_2)}{(y_1)^2} = \\ &= c + (d - a)y - by^2. \end{aligned}$$

The analytic continuations of local solutions of this projective connection are forming the leaves of a so-called Riccati foliation on the corresponding ruled surface (see [Bru04]).

Let  $P$  be a  $\mathbf{P}^1$ -bundle over  $X$ . A foliation  $\mathcal{F}$  on  $P$  is called a *Riccati foliation* when it is defined by meromorphic Riccati equations

$$dy_i + \alpha_i(x_i)y_i^2 + \beta_i(x_i)y + \gamma_i(x_i) = 0, \quad \alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \Omega \otimes \mathcal{M}(U_i) \quad (\text{A.5})$$

on charts  $U_i \times \mathbf{P}^1$ , such that these equations are conjugated by the transition maps  $\phi_{ij} \in \text{PGL}(2, \mathcal{O})$  of  $P$ . The foliation  $\mathcal{F}$  then has vertical leaves located in the poles of  $\alpha, \beta, \gamma$ . All other fibres of  $P$  are globally transverse to  $\mathcal{F}$ . The singularities of  $\mathcal{F}$  are located on the vertical leaves. As before, two Riccati foliations on  $X$  are called *isomorphic*, if they are conjugated by holomorphic gauge transformations  $(x, Y) \mapsto (x, \phi(x) \cdot Y)$  with  $\phi \in \text{PSL}(2, \mathcal{O})$ .

On the other hand, let  $(\mathcal{F}, P)$  be a Riccati foliation. One can show that for each rank 2 vector bundle  $E$  satisfying  $\mathbf{P}(E) = P$  and each meromorphic connection  $\zeta$  on  $\det(E)$ , there is a unique meromorphic connection  $\nabla$  on  $E$  such that  $\mathbf{P}(\nabla) = \mathcal{F}$  and  $\text{tr}(\nabla) = \zeta$ . Two rank 2 connections over a Riemann surface are called *projectively equivalent*, if they define the same Riccati foliation.

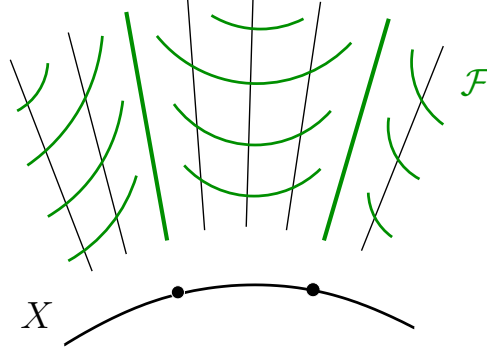


FIG. A.1 – Riccati foliation : A generically transverse foliation

**Lemma A.6** *Two rank 2 connections  $(E, \nabla)$  and  $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$  over  $X$  are projectively equivalent if, and only if, there is a rank 1 connection  $(L, \zeta)$  over  $X$  such that*

$$(\tilde{E}, \tilde{\nabla}) = (L, \zeta) \otimes (E, \nabla).$$

**Remark A.7** *All remains valid on any complex manifold  $M$ . The flatness condition for (A.5) is equivalent to*

$$\begin{aligned} d\alpha_i &= \beta_i \wedge \alpha_i \\ d\beta_i &= 2\gamma_i \wedge \alpha_i \\ d\gamma_i &= \gamma_i \wedge \beta_i \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

### A.2.3 Isomonodromic deformations

Let  $(X_t)_{t \in T}$  be an analytic family of *marked* Riemann surfaces (*cf.* [Nag88], page 347), given by a submersion  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow T$ . We assume that the parameter space  $T$  is contractile. Let  $(\mathcal{E}, \nabla)$  be a meromorphic connection (not necessarily flat) on  $\mathcal{X}$ , inducing an analytic family  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$ . For each parameter  $t \in T$ , denote by  $D_t$  the polar set of the connection  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)$ . We only consider the case where  $\mathcal{D} = (D_t)_{t \in T}$  is a smooth divisor on  $\mathcal{X}$ , which is transversal to the parameter  $t$ . Then we say that  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  is a *topologically trivial, analytic* family of connections.

A topologically trivial, analytic family  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  is called an *isomonodromic family*, if it is induced by a flat connection over the total space  $\mathcal{X} \rightarrow T$  of the family of curves. Along an isomonodromic family, the monodromy representation is constant. An isomonodromic deformation is a special case of isomonodromic families, which is induced by some initial connection  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$ ,

and where the Stokes-data are also constant along the deformation. Yet Stokes data are well-defined only in the *non-resonant* case, *i.e.* if the leading term of the connection matrix of the initial connection has only distinct eigenvalues.

Usually (*cf.* [Mal83a], [Mal83b], [Pal99], [Kri02]), isomonodromic deformations of tracefree rank 2 connections are defined as follows.

**Définition A.8** *Let  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  be a non-resonant, tracefree rank 2 connection on a Riemann surface  $X_0$ . A topologically trivial, analytic deformation  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  of this initial connection is called an isomonodromic deformation, if*

- *for each parameter  $t$ , the order of the poles of  $\nabla_t$  is equal to the order of the poles of  $\nabla_0$  and*
- *$(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  is induced by a flat connection  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$ ,*
- *whose connection matrix  $A$  satisfies the following transversality-condition :*

$$(dA)_\infty \leq (A)_\infty. \quad (\text{A.7})$$

**Remark A.9** *Consider a flat tracefree connection of rank 2 on a smooth family of vector bundles over Riemann surfaces with smooth polar divisor  $\mathcal{D}$  (as a set). Then any irreducible component  $\mathcal{D}^i$  of the polar divisor  $\mathcal{D}$  not satisfying the transversality condition (A.7) is projectively apparent in the following sense : after a bimeromorphic transformation, the polar divisor of the associated projective connection becomes  $\mathcal{D} \setminus \mathcal{D}^i$  (as a set) (see [LP07], page 736).*

Let  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  be a flat connection inducing an isomonodromic family  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$ . Locally in each non-singular point of  $\mathcal{X}$ , the connection is given by systems  $dY \equiv 0$ . In particular, any local solution in a non-singular point is automatically transverse to the parameter  $t \in T$ , *i.e.* transverse to  $\{t = \text{const}\}$ . Recall that we are considering smooth families  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$  of marked punctured Riemann surfaces. This implies, that the reduced divisor  $\mathcal{D}$  of  $\nabla$  is transverse to the parameter. If  $\mathcal{D}^i$  is a logarithmic singularity of  $\nabla$ , then the connection is «locally constant» along  $\mathcal{D}^i$  (see section A.3.1b)). We shall see that if  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  defines an isomonodromic deformation of an  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ -connection, then it is «locally constant» in any point of its polar divisor  $\mathcal{D}$ . Let us now precise the notion of local constancy. On smooth families  $(X_t)_{t \in T}$  of marked Riemann surfaces we shall always denote by  $(t, x) \in W \times U$  local trivialization coordinates, with  $t_1 \in W \subset T$  and  $x \in U \subset X_{t_1}$ .

**Convention A.10** *By gauge-coordinate-transformations in coordinates  $(t, x, Y) \in W \times U \times \mathbf{C}^2$  with  $W \subset T$ , we will always mean gauge-coordinate-transformations fixing the parameter  $t$  :*

$$(\tilde{t}, \tilde{x}, \tilde{Y}) = (t, \varphi(t, x), \phi(t, x) \cdot Y).$$

**Définition A.11** A flat connection  $\nabla$  on a smooth family of holomorphic vector bundles  $(E_t \rightarrow X_t)_{t \in T}$  is called *locally constant* if locally in each point of the total space  $\mathcal{X}$  of the curve deformation, the connection matrix does not depend on the parameter  $t \in T$ , up to a convenient gauge-coordinate transformation.

**Remark A.12** In other words, on open sets as above, there are submersions  $\varphi : W \times U \rightarrow U$  transversal to the parameter, such that  $\nabla$  is gauge-equivalent to the pull-back  $\varphi^*(\nabla|_{t=t_1})$ .

This means that up to an appropriate gauge-coordinate transformation on  $W \times U \times \mathbf{C}^2$ , the system  $dY = A(x)Ydx$  defining  $\nabla|_{t=t_1}$  over  $U$  defines  $\nabla$  over  $W \times U$  as well. In this sense,  $\nabla$  can locally be seen as the product of an initial connection with the parameter space.

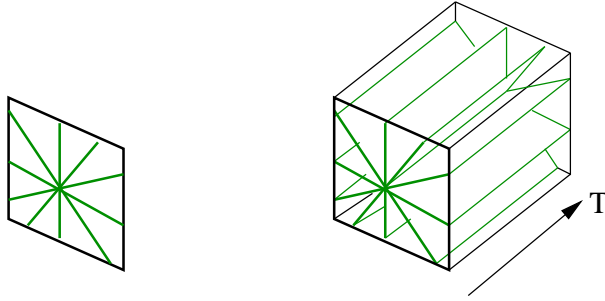


FIG. A.2 – Local constancy, or local product structure

**Proposition A.13** Let  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  is a flat tracefree rank 2 connection such that the leading term of the connection matrix  $A$  has no zeros along the polar divisor. Then the connection  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  is locally constant if, and only if, its connection matrix satisfies the transversality condition (A.7).

**Remark A.14** Keep in mind that the transversality condition is strictly weaker to the condition of local constancy, if we consider connections of rank greater than 2 or rank 2 connections with non-trivial trace.

In order to prove proposition A.13, we will use the following lemma.

**Lemma A.15** If  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  is a flat tracefree rank 2 connection satisfying the transversality condition (A.7) such that the order of the poles is constant, and if  $t_1$  is a point of  $T$ , then there is a neighborhood  $W$  of  $t_1$  such that, in restriction



to the parameter space  $W$ , the connection  $\nabla$  can locally be defined on open sets  $W \times U \times \mathbf{C}^2$  with coordinates  $(t, x, Y)$  by systems of normal form

$$dY = \frac{1}{x^l} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c(x) & 0 \end{pmatrix} Y dx \quad (\text{A.8})$$

not depending on  $t$ , where  $c$  is a holomorphic function on  $U$ .

**Proof:** On a local chart  $W \times U \times \mathbf{C}^2$ , let  $\nabla$  be given by a system

$$dY = A(t, x)Y \quad \text{with} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}.$$

If  $\nabla_t$  has a pole of order  $l$  at  $\{x = 0\}$  for each parameter  $t$  in a neighborhood of  $t_1$ , then at least one of the 1-forms  $a, b$  or  $c$  has a pole of order  $l$  at  $\{x = 0\}$ , which remains a pole of order  $l$  in restriction to  $t_1$ . We may suppose this is the case for  $b$ , otherwise we may apply a gauge transformation such as  $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} Y$  or  $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$ . If the transversality condition is satisfied, then  $b$  is of the form  $b = \frac{1}{x^l}(b_0(t, x)dx + xb_1(t, x)dt)$ , where  $b_0$  and  $b_1$  are holomorphic functions with  $b_0(t, 0) \neq 0$ . By our assumption,  $b_0(t, 0)$  is even non-zero for each parameter  $t$  in a small neighborhood of  $t_1$ . Thus  $x^l b$  is defining a non-singular (integrable) foliation transverse to the parameter  $t$ , and there is a coordinate transformation fixing  $\{x = 0\}$  and straightening the foliation given by  $x^l b = 0$  to  $dx = 0$ .

**Remark A.16** *With the notions of remark A.12, the submersion  $\varphi(t, x)$  defining this coordinate change is given by a first integral of the foliation  $x^l b = 0$ .*

In other words, up to a coordinate transformation, we make sure that  $b$  is of the form  $b = \frac{1}{x^l}b_0(t, x)dx$ , where  $b_0(t, x)$  has no zéros in a sufficiently small neighborhood of  $(0, t_1)$ . Modulo a gauge transformation of the form  $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} (\sqrt{b_0})^{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{b_0} \end{pmatrix} Y$  we may suppose  $b = \frac{1}{x^l}dx$ . The integrability condition  $dA = A \wedge A$  is equivalent to

$$\begin{aligned} da &= b \wedge c \\ db &= 2a \wedge b \\ dc &= 2c \wedge a \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

We conclude that  $a$  has the form  $\frac{a_0(t, x)}{x^l}dx$ . By a gauge transformation  $\tilde{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_0 & 1 \end{pmatrix} Y$  we make sure that  $a \equiv 0$ . Then by (A.9) we have  $0 = b \wedge c$ . Thus  $c$

has the form  $\frac{c_0(t,x)}{x^l}dx$ . Again by (A.9) we get  $dc = 0$ . Therefore  $c$  does not either depend on  $t$  : we have  $c = \frac{c_0(x)}{x^l}$ .  $\square$

**Example A.17** *The condition in the upper lemma, that the order of the poles has to be constant is necessary. Consider for example the connection*

$$dY = \begin{pmatrix} -\frac{t}{x^2}dx + \frac{1}{x}dt & 0 \\ 0 & \frac{t}{x^2}dx - \frac{1}{x}dt \end{pmatrix} Y$$

*on the trivial bundle over  $(\mathbf{C}, 0) \times (\mathbf{C}, 0)$  with coordinates  $(t, x)$ . It satisfies the transversality condition, but it can not be locally constant since the order of the poles changes for  $t = 0$ .*

**Proof of proposition A.13 :** Note first that (A.7) is satisfied if, and only if, it is satisfied after a gauge-coordinate transformation.

Clearly, systems of normal form (A.8) are locally constant.

Conversely, if  $\nabla$  is locally constant, the local charts can be chosen in a way that the connection matrices  $A$  do not depend on the parameter  $t$  :

$$dY = A(x)Y.$$

Then  $dA$  is zero and has no polar divisor.  $\square$

**Remark A.18** *Let  $(E \rightarrow X, \nabla)$  be a meromorphic, tracefree rank 2 connection over a Riemann surface. The upper proof shows that, up to an appropriate holomorphic gauge-transformation, this connection is given locally by systems of normal form (A.8). Then the rational number  $\max\{l + 1 - \frac{\nu}{2}, 0\}$ , where  $\nu$  is the greatest integer such that  $\frac{c}{x^\nu}$  is still holomorphic, is called the Katz-rank of the singularity (cf. [Var96]). The Katz-rank is invariant under meromorphic gauge-transformation. Moreover, we see that the Katz-rank is constant along isomonodromic deformations.*

According to proposition A.13, isomonodromic deformations of tracefree rank 2 connections may be defined alternatively as follows :

**Définition A.19** *A topologically trivial, analytic deformation  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  of some initial tracefree rank 2 connection  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  is called an isomonodromic deformation, if it is induced by a flat, locally constant connection  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$ .*

In this thesis, we shall use this latter definition of isomonodromic deformations, which is specific to the  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -case. As we shall see, this definition is naturally valid also in the  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ -resonant case.

Two isomonodromic deformations of a common initial connection will be called *isomorphic*, if the associated flat connections are isomorphic. More explicitly, two isomonodromic deformations  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  and  $(\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\nabla})$  with parameter spaces  $T$ , respectively  $\tilde{T}$  are isomorphic, if there is a biholomorphism  $f$ , an isomorphism  $F$  of marked curves and an isomorphism  $\Psi$  of vector bundles extending the isomorphism of the initial connections, such that the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{E}, \nabla) & \xrightarrow[\sim]{\Psi} & (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\nabla}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X} & \xrightarrow[\sim]{F} & \tilde{\mathcal{X}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow[\sim]{f} & \tilde{T}. \end{array}$$

Here  $\Psi$  consists locally of gauge-coordinate-transformations compatible with  $F$  which are conjugating  $\nabla$  to  $\tilde{\nabla}$ .

It is clear from this definition that an isomonodromic deformation  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  of some initial connection  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  is also an isomonodromic deformation of each of the connections  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)$  it contains for a parameter  $t \in T$ .

**Remark A.20** *We would like to stress that the gauge transformations we defined for these flat families of connections (resp. Riccati foliations) are not only holomorphic families of gauge transformations, but global holomorphic gauge transformations of the flat connection on the global bundle  $\mathcal{E}$  (resp.  $\mathcal{P}$ ) of the family.*

#### A.2.4 Bimeromorphic and elementary transformations

Let us introduce the notion of elementary transformations along a rank 2 vector bundle  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$  on a smooth family of Riemann surfaces  $\mathcal{X} \rightarrow T$  with parameter space  $T$ . Let  $\mathcal{D}$  be a smooth irreducible divisor on  $\mathcal{X}$  transverse to the parameter  $t \in T$  and let  $s : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  be a holomorphic section without zeros.

**Définition A.21** *Let  $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}$  and  $s : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  be as above. In a neighborhood of the divisor  $\mathcal{D}$ , choose a trivialization chart  $W \times U \times \mathbb{C}^2$  of the vector bundle*

$\mathcal{E}$  with coordinates  $(t, x, (y_1, y_2))$ , such that the divisor  $\mathcal{D}$  and the section  $s$  are given respectively by  $\{x = 0\}$  and  $\{x = 0, (y_1, y_2) = (1, 0)\}$ . In particular,  $\mathcal{D}$  and  $s$  do not depend on the parameter in these coordinates. Then the elementary transformation of  $\mathcal{E}$  directed by  $s$  is a bimeromorphic map  $\text{elm}_s : \mathcal{E} \dashrightarrow \widehat{\mathcal{E}}$ , given in the upper coordinates by the bimeromorphic gauge transformation

$$(t, x, (y_1, y_2)) \mapsto (\hat{t}, \hat{x}, (\hat{y}_1, \hat{y}_2)) = (t, x, (xy_1, y_2)),$$

and by the identity map in every chart over  $\mathcal{X} \setminus \mathcal{D}$ .

The vector bundle  $\widehat{\mathcal{E}}$  is thereby well defined modulo isomorphism : as can be seen in the following commuting diagram, modulo holomorphic gauge transformations the elementary transformation  $\text{elm}_s$  does not depend on the chosen trivialization chart.

$$\begin{array}{ccc} (x, Y) & \xrightarrow{\text{elm}} & \left( x, \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y \right) \\ \downarrow (\varphi(t, x), \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} Y) & & \downarrow (\varphi(x, t), \begin{pmatrix} 1 & \varphi b \\ 0 & d \end{pmatrix} Y) \\ \left( \varphi(t, x), \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} Y \right) & \xrightarrow{\text{elm}} & \left( \varphi(t, x), \begin{pmatrix} \varphi(t, x) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} Y \right) \end{array} \quad (\text{A.10})$$

Here  $\varphi(t, x)$  is a diffeomorphism fixing  $\{x = 0\}$  and  $b, d$  are holomorphic functions on  $W \times U$ , such that  $d$  has no zeros. Note that in the above coordinates, the elementary transformation centered in  $\{x = 0, (y_1, y_2) = (0, 1)\}$  is "inverse" to  $\text{elm}_s$  in the sense that their composition provides a bundle projectively equivalent to the initial one.

In restriction to a fixed parameter  $t_1 \in T$ , this definition of elementary transformations on  $(E_t \rightarrow X_t)_{t \in T}$  is equivalent to the construction of O. Gabber, explained in [EV99] and [Mac07]. Let  $\widehat{E}_{t_1} \rightarrow X_{t_1}$  be the vector bundle resulting from such an elementary Gabber transformation on  $E_{t_1} \rightarrow X_{t_1}$ , centered in some point  $p$  of  $E_{t_1}$ . We then have

$$\deg(\det \widehat{E}_{t_1}) = \deg(\det E_{t_1}) + 1$$

and for each line bundle  $\widehat{L}$  of  $\widehat{E}_{t_1}$  coming from a line bundle  $L$  of  $E_{t_1}$ , we have

$$\begin{aligned} \deg(\widehat{L}) &= \deg(L) + 1 & \text{if } p \in L \\ \deg(\widehat{L}) &= \deg(L) & \text{if } p \notin L. \end{aligned}$$

In particular, if  $\widehat{\sigma}$  (resp.  $\sigma$ ) are the sections associated to  $\widehat{L}$  (resp.  $L$ ) on the respective projective bundles, by (A.3) their self-intersection numbers are related in the following way :

$$\widehat{\sigma} \cdot \widehat{\sigma} = \begin{cases} \sigma \cdot \sigma - 1 & \text{if } p \in \sigma \\ \sigma \cdot \sigma + 1 & \text{if } p \notin \sigma. \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

This definition is compatible with the usual definition of elementary transformations on the associated ruled surfaces (see [Fri98], [EV99]).

**Remark A.22** *Each bimeromorphic gauge transformation on a curve is projectively equivalent to the composition of a finite number of elementary transformations (see [LP07], page 737).*

Diagram (A.10) further shows that elementary transformations  $\text{elm}_s$  are well defined for vector bundles equipped with a connection  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \widehat{\nabla})$  and they provide a new connection  $(\widehat{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{X}, \widehat{\nabla})$ . With the help of a similar commuting diagram, it can be shown that this connection only depends on the position of  $s$  in the associated Riccati foliation.

**Lemma A.23** *Denote by  $(\widehat{\mathcal{E}}, \widehat{\nabla})$  the flat connection resulting from an elementary transformation along  $s : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$  on some initial flat connection  $(\mathcal{E}, \nabla)$ , where  $\mathcal{D}$  is a divisor transverse to the parameter.*

1. *Suppose that  $\nabla$  is non-singular on  $\mathcal{D}$ . Then  $\widehat{\nabla}$  is locally constant if, and only if, the induced section  $s$  of  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  is included in a leaf of the associated Riccati foliation.*
2. *Suppose that  $\nabla$  is locally constant and has a pole on  $\mathcal{D}$ . If  $s$  is a singularity of the foliation  $\mathbf{P}(\nabla)$ , then  $\widehat{\nabla}$  will still be locally constant.*

**Proof:** Choose appropriate local coordinates, such that the connection matrix of  $\nabla$  and the position of  $\mathcal{D}$  are constant in  $t$ . Then  $s$  is included in a leaf of the associated Riccati foliation if, and only if,  $s$  is constant in  $t$  with respect to the projective coordinates. Moreover, if  $s$  is a singularity of the foliation  $\mathbf{P}(\nabla)$ , then  $s$  is also constant in  $t$  with respect to the projective coordinates. Recall that an elementary transformation only depends on the position of its center in the associated Riccati foliation. In both cases, the elementary transformation  $\text{elm}_s$  thus can be seen as an elementary transformation without parameter. It is clear that the resulting connection  $\widehat{\nabla}$  will then be locally constant. Conversely, if  $\widehat{\nabla}$  is constant in some appropriate coordinates, and the connection resulting from the

inverse elementary transformation  $\text{elm}_s^{-1}$  is non-singular over  $\mathcal{D}$  as in 1., then the center of  $\text{elm}_s^{-1}$  has to be a singularity of  $\mathbf{P}(\widehat{\nabla})$  over  $\mathcal{D}$ . Thus the position of the center of  $\text{elm}_s^{-1}$  is constant, too. By consequence,  $\nabla$  and the position of  $s$  in  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$  are constant in the corresponding coordinates.  $\square$

In example A.51 we will construct a non-trivial isomonodromic deformation by an elementary transformation over a pole which is not centered in the singularity.

### A.3 The universal isomonodromic deformation

Let  $X_0$  be a Riemann surface of genus  $g$ . Let  $\nabla_0$  be a meromorphic tracefree rank 2 connection on  $E_0 \rightarrow X_0$  with  $m$  poles of multiplicity respectively  $n_1, \dots, n_m$ , given in local coordinates  $x^i$  by  $\{x^i = 0\}$ . Denote by  $n = n_1 + \dots + n_m$  the number of poles counted with multiplicity. We shall denote by  $D_0 = \sum_{i=1}^n \{x^i = 0\}$  the polar set on  $X_0$  of this connection. By  $X_0^*$  we denote the set of non-singular points  $X_0 \setminus D_0$ . Let  $\rho : \pi_1(X_0^*) \rightarrow \text{SL}(2, \mathbf{C})$  be the monodromy representation of  $\nabla_0$ .

We will now construct the universal isomonodromic deformation  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  with base curve  $\mathcal{X} \rightarrow T$  of  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$ . We will denote by  $\mathcal{D} = (D_t)_{t \in T}$  the polar locus of the universal isomonodromic deformation, given by disjoint sections  $\mathcal{D}^i : T \rightarrow \mathcal{X}$  with  $i \in \{1, \dots, m\}$ . The parameter space  $T$  will be simply connected, of dimension

$$\dim(T) = \sup(0, 3g - 3 + n),$$

except for the special case  $g = 1, n = 0$ , where we will have  $\dim(T) = 1$ .

**Convention A.24** *Since in isomonodromic deformations we associate one monodromy representation to a family of connections, we always will consider the  $m$ -punctured base curve  $(X_t^*)_{t \in T}$  with  $X_t^* = X_t \setminus D_t$  as a marked curve, even when it is not explicitly mentioned.*

The universal isomonodromic deformation will satisfy the following universal property.

**Proposition A.25 (Universal property)** *Let  $(\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\nabla})$  be an isomonodromic deformation of  $(\tilde{E}_0 \rightarrow \tilde{X}_0, \tilde{\nabla}_0)$  with simply connected parameter space  $\tilde{T}$  and initial parameter  $\tilde{t}_0$ . Suppose there is an isomorphism  $F_0 : (\tilde{X}_0, \tilde{D}_0) \xrightarrow{\sim} (X_0, D_0)$  of marked curves and an isomorphism  $\Psi_0 : (\tilde{E}_0, \tilde{\nabla}_0) \xrightarrow{\sim} (E_0, \nabla_0)$  of connections given locally by holomorphic gauge transformations  $\psi_0$  conjugating  $(\tilde{E}_0, \tilde{\nabla}_0)$  to  $F_0^*(E_0, \nabla_0)$ .*

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{E}_0, \tilde{\nabla}_0) & \xrightarrow[\sim]{\Psi_0} & (E_0, \nabla_0) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\tilde{X}_0, \tilde{D}_0) & \xrightarrow[\sim]{F_0} & (X_0, D_0) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \{\tilde{t}_0\} & \xrightarrow{f_0} & \{t_0\}
 \end{array}$$

Then there is a triple  $(f, F, \Psi)$  extending  $(f_0, F_0, \Psi_0)$  to a commuting diagram

$$\begin{array}{ccc}
 (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\nabla}) & \xrightarrow{\Psi} & (\mathcal{E}, \nabla) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{D}}) & \xrightarrow{F} & (\mathcal{X}, \mathcal{D}) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \tilde{T} & \xrightarrow{f} & T,
 \end{array}$$

where  $(f, F)$  are holomorphic maps such that  $F|_{\tilde{t}}$  is a biholomorphism of marked Riemann surfaces for each parameter  $\tilde{t} \in \tilde{T}$ , and  $\Psi$  is given locally by holomorphic gauge transformations  $\psi$  conjugating  $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\nabla})$  to  $F^*(\mathcal{E}, \nabla)$ . Moreover, the triple  $(f, F, \Psi)$  is unique provided that  $(g, m)$  is different from  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  and  $(1, 0)$ .

In the non-singular or logarithmic case, the maps  $(f, F)$  will be given by Teichmüller theory. In the general case, the maps  $(f, F)$  factorize by the Teichmüller classifying maps. These are not unique in the special cases  $(g, m) = (0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  or  $(1, 0)$ . Yet for each appropriate choice of these maps, the triple  $(f, F, \Psi)$  is unique.

This universal property has two immediate corollaries.

**Corollary A.26** *Suppose that  $(g, m)$  is different from  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  and  $(1, 0)$ . If  $T'$  is a germ of submanifold of  $T$  such that the restriction of the universal isomonodromic deformation  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  to  $T'$  is trivial, i.e. isomorphic to a constant deformation, then*

$$\dim(T') = 0.$$

**Proof:** Let  $(\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\nabla})$  the restriction of the universal isomonodromic deformation to the parameter space  $T'$ . Then there are two triples  $(f, F, \Psi)$  possible in the universal property theorem :  $f$  can either be the inclusion map or the constant map. Since we are in the general cases where  $(f, F, \Psi)$  is unique, this implies  $\dim(T') = 0$ .  $\square$

**Remark A.27** *In the special configurations for  $(g, m)$  cited above, there exist non-trivial automorphisms of the base curve. In considering the quotient of the universal isomonodromic deformation by the action of these isomorphisms, we can restore the uniqueness in the universal property (cf. section A.3.3) and thus the assertions of this corollary, if  $(g, n)$  is different from  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  and  $(1, 0)$ .*

*If  $(g, n)$  is equal to  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  or  $(0, 2)$ , however, the dimension of the parameter space of the universal isomonodromic deformation is zero. Again, the upper corollary holds in this case. If  $(g, n)$  is equal to  $(1, 0)$ , then the universal isomonodromic deformation is induced by the universal Teichmüller curve of marked tori. The dimension of its parameter space is one, and if the restriction to a sub-space of the parameter space  $T'$  is trivial, then  $\dim(T') = 0$ .*

**Corollary A.28** *The universal isomonodromic deformation  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  of  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  is also the universal isomonodromic deformation of each of the connections  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)$  it contains for a parameter  $t \in T$ .*

**Proof:** Choose any connection  $(E_{t_1} \rightarrow X_{t_1}, \nabla_{t_1})$  associated to a parameter  $t_1 \in T$ . We know that  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  defines also an isomonodromic deformation with initial connection  $(E_{t_1} \rightarrow X_{t_1}, \nabla_{t_1})$ . Let  $(\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\nabla})$  be an isomonodromic deformation, such that the connection associated to the initial parameter is isomorphic to  $(E_{t_1} \rightarrow X_{t_1}, \nabla_{t_1})$ . From the proof of the universal property theorem, it will follow immediately that this isomorphism extends in a way similar to the upper theorem. By consequence,  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  is also the universal isomonodromic deformation for the initial connection  $(E_{t_1} \rightarrow X_{t_1}, \nabla_{t_1})$ .  $\square$



### A.3.1 Construction

Consider the universal curve of marked  $m$ -pointed Riemann surfaces  $\mathcal{X}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}$ , parametrized by  $(\mathcal{T}, \tau_0)$  being the Teichmüller space  $\text{Teich}(g, m)$  with initial parameter  $\tau_0$  corresponding to  $X_0$  with the distinguished set  $D_0$ , as in [Nag88], page 322.

**Remark A.29** *The dimension of the Teichmüller space  $\text{Teich}(g, m)$  is*

$$\begin{aligned} 3g - 3 + m & \quad \text{if } g \geq 2 \\ \sup\{m, 1\} & \quad \text{if } g = 1 \\ \sup\{m - 3, 0\} & \quad \text{if } g = 0 \end{aligned}$$

We shall denote by  $\mathcal{D}_{\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^m \mathcal{D}_{\mathcal{T}}^i$  the submanifold of  $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$  corresponding to the distinguished points and their deformations. For  $(\mathcal{X}_{\mathcal{T}}, \mathcal{D}_{\mathcal{T}}) = (X_{\tau}, D_{\tau})_{\tau \in \mathcal{T}}$  we will denote by  $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}^*$  (resp.  $X_{\tau}^*$ ) the punctured curves  $\mathcal{X}_{\mathcal{T}} \setminus \mathcal{D}_{\mathcal{T}}$  (resp.  $X_{\tau} \setminus D_{\tau}$ ). Consider the exact sequence of homotopy groups associated to the fibration  $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}^* \rightarrow \mathcal{T}$ . Since the Teichmüller space  $\mathcal{T}$  is contractile (cf. [Hub06], page 274), we see that for each parameter  $\tau \in \mathcal{T}$ , the complex manifolds  $X_{\tau}^*$  and  $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}^*$  are homotopically equivalent and each generator of the fundamental group of  $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}^*$  corresponds to a unique generator of the fundamental group of  $X_{\tau}^*$ . In that way, we can consider  $\rho$  as a representation of  $\pi_1(\mathcal{X}_{\mathcal{T}}^*)$  or  $\pi_1(X_{\tau}^*)$  as well.

As we shall see, a logarithmic connection  $(E_0, \nabla_0)$  on  $X_0$  with poles in  $D_0$  extends in a unique way to an integrable logarithmic connection on  $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$  with poles in  $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$  and induces for each parameter  $\tau \in \mathcal{T}$  a unique connection on  $X_{\tau}$  with simple poles in  $D_{\tau}$ . This defines the universal isomonodromic deformation in the logarithmic case.

In the case of a non-logarithmic initial connection, there is still an integrable locally constant connection on  $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$  with poles in  $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$  extending  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$ , but this connection will no longer be unique. Indeed, each pole of order  $l$  will contribute  $l-1$  degrees of freedom in the construction. We thereby get a universal isomonodromic deformation of dimension

$$3g - 3 + m + (n - m) = 3g - 3 + n$$

if  $(g, m) \neq (0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0)$ . The universal isomonodromic deformation will be global, due to the existence of *tubular neighborhoods*  $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}^i$  of  $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}^i$  in  $\mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ .

a) **Non-singular case (arbitrary rank)**

**Theorem A.2 (Classical Riemann-Hilbert correspondence)** *The set of non-singular integrable rank  $r$  connections on a complex manifold  $M$  (modulo holomorphic gauge transformation) is in one-to-one correspondence with the set of representations from  $\pi_1(M, z_0)$  to  $\mathrm{GL}(r, \mathbf{C})$  (modulo conjugacy).*

**Proof:** For a given monodromy  $\rho$ , we may construct the associated connection over  $M$  by *suspension*. Let  $\widetilde{M}$  be the universal cover of the complex manifold  $M$ . Let  $\widetilde{\nabla}$  be the trivial connection  $d\widetilde{Y} = 0$  on the trivial bundle  $\widetilde{M} \times \mathbf{C}^r$  with coordinates  $(\tilde{z}, \tilde{Y})$  over  $\widetilde{M}$ . Now the fundamental group  $\pi_1(M)$  is naturally acting on  $\widetilde{M}$ . We may further define an action on  $\widetilde{M} \times \mathbf{C}^r$  in the following way :

$$\gamma \cdot (\tilde{x}, \tilde{Y}) = (\gamma \cdot \tilde{z}, \rho(\gamma) \cdot \tilde{Y}).$$

Since the monodromy matrices  $\rho(\gamma)$  are constant, the connection  $d\widetilde{Y} = 0$  can be naturally pushed down to the quotient of this action. Thereby we define a non-singular connection on a implicitly defined vector bundle  $E$  over  $M$ . This connection has monodromy  $\rho$ .

Now let  $(E, \nabla)$  and  $(\widetilde{E}, \widetilde{\nabla})$  be two non-singular integrable connections of rank  $r$  over  $M$  with monodromy representation  $\rho$ . We may choose a common atlas for  $M$ . Let  $U$  be a small neighborhood of  $z_0 \in M$ . Then up to gauge transformations  $\phi(z) \cdot Y$  respectively  $\tilde{\phi}(z) \cdot \tilde{Y}$ , the connections  $\nabla$  and  $\widetilde{\nabla}$  are defined in the trivialization charts by  $dY = 0$  respectively  $d\tilde{Y} = 0$  over  $U$ . Now the gauge transformation  $\psi = \tilde{\phi} \circ \phi^{-1}$  can be continued analytically and since the analytic continuations of  $\phi$  and  $\tilde{\phi}$  give rise to the same monodromy representation,  $\psi$  has trivial monodromy. Thus  $\psi$  defines an isomorphism.  $\square$

**Corollary A.30** *Let  $Z \subset M$  be a complex submanifold of  $M$  such that the inclusion map  $i : Z \rightarrow M$  provides an isomorphism  $i_* : \pi_1(Z, z_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(M, z_0)$  with  $z_0 \in Z$ . Let  $(E_Z, \nabla_Z)$  be a flat non-singular rank  $r$  connection over  $Z$ . Then this connection extends to a flat non-singular rank  $r$  connection  $(E, \nabla)$  over  $M$ , which is unique in the following sense.*

*If  $(E, \nabla)$  and  $(\widetilde{E}, \widetilde{\nabla})$  are two non-singular rank  $r$  connections over  $M$  such that in restriction to  $Z$  there is an isomorphism  $\psi_Z : (\widetilde{E}, \widetilde{\nabla})|_Z \xrightarrow{\sim} (E, \nabla)|_Z$ , then  $\psi_Z$  extends to an isomorphism  $\psi : (\widetilde{E}, \widetilde{\nabla}) \xrightarrow{\sim} (E, \nabla)$  over  $M$ .*

**Proof:** Let  $\rho$  be the monodromy representation of the connection  $(E_Z, \nabla_Z)$ . Then the classical Riemann-Hilbert correspondence provides a flat non-singular connection  $(E, \nabla)$  over  $M$ , having monodromy  $\rho$ . Since  $(E_Z, \nabla_Z)$  and  $(E, \nabla)|_Z$  are both flat non-singular connections on  $Z$  having the same monodromy, they are isomorphic.

Let  $(E, \nabla)$  and  $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$  be as above. Let  $\mathcal{U}$  be a small neighborhood of  $z_0$  in  $M$  and let  $U_Z$  be the induced neighborhood on  $Z$ . In appropriate coordinates, the connections  $\tilde{\nabla}$  and  $\nabla$  are given by the trivial connection  $d\tilde{Y} = 0$  respectively  $dY = 0$  on  $\mathcal{U}$ . Denote by  $\phi_Z$  be the gauge transformation corresponding to the restriction of the isomorphism  $\psi_Z|_{U_Z}$ . Now each gauge transformation conjugating  $d\tilde{Y} = 0$  to  $dY = 0$  is constant. Hence there is a unique gauge transformation  $\phi$  over  $\mathcal{U}$  conjugating  $\tilde{\nabla}$  to  $\nabla$ , such that  $\phi|_{U_Z} = \phi_Z$ . Now  $\phi$  can be continued analytically along any path in  $M$ . Since any homotopy class of a closed path in  $M$  has a representant in  $\pi_1(Z)$ , the analytic continuations of  $\phi$  cannot have monodromy. This defines the desired isomorphism  $\psi$ .  $\square$

If  $\nabla_0$  is non-singular, this corollary provides the unique non-singular flat rank 2 connection  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{T}}, \nabla)$  over the universal Teichmüller curve  $\mathcal{X}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}$ , which has the same monodromy representation as  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$ . We have

$$(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{T}}, \nabla)|_{\tau=\tau_0} = (E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0).$$

Then  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{T}}, \nabla)$  defines the universal isomonodromic deformation of  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$ . For each parameter  $\tau \in \mathcal{T}$ , this universal object induces the unique (modulo isomorphism) non-singular rank 2 connection  $(E_{\tau} \rightarrow X_{\tau}, \nabla_{\tau})$  over  $X_{\tau}$ , having monodromy  $\rho$ .

#### b) Logarithmic case

Let  $M$  be a complex manifold. Given a normal crossing divisor  $\mathcal{D}$ , the set of integrable logarithmic rank  $r$  connections  $(E, \nabla)$  over  $M$  with divisor  $\mathcal{D}$  (modulo *meromorphic transformations*) is in one-to-one correspondence with the set of representations of  $\pi_1(M \setminus \mathcal{D})$  in  $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$  (modulo conjugacy), according to a result of P. Deligne [Del70] (see also [Kat76]). Since we study connections modulo *holomorphic transformations*, we will need the more precise version of the Riemann-Hilbert correspondence in rank 2 stated below.<sup>2</sup> We will need the following well-known result, which is a corollary of

---

<sup>2</sup>P. Deligne actually stated a "holomorphic version" of the Riemann-Hilbert correspondence, but

the Poincaré-Dulac theorem stated for example in [NY04].

**Proposition A.31** *Let  $(E, \nabla)$  be a flat logarithmic rank 2 connection over a complex manifold  $M$ , with local coordinates  $(x_1, \dots, x_N)$ , which has a pole in  $\{x_1 = 0\}$ . Then there are local gauge transformations  $\phi$  such that  $\phi^*\nabla$  is given by a system*

$$dY = \frac{A}{x_1} Y dx_1,$$

where the matrix  $A$  has one of the following standard forms

$$A = \begin{pmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \theta + n & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} \theta + n & x_1^n \\ 0 & \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

with  $\theta_1 - \theta_2 \notin \mathbf{Z}$  and  $n \in \mathbf{N}$ . Moreover,  $\phi$  is unique modulo composition by a matrix of the form respectively

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & \nu x_1^n \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} \lambda & \nu x_1^n \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (\text{A.13})$$

where  $\lambda, \mu, \nu$  are constants.

**Remark A.32** *In particular, a flat logarithmic rank 2 connection  $(\mathcal{E}, \nabla)$  on a family of Riemann surfaces is locally constant.*

Since  $\exp(\log(x_1) \cdot A)$  is a local fundamental solution, the associated *local monodromies* (that is the conjugacy class of the image under  $\rho$  of a small positive loop around  $\{x_1 = 0\}$ ) are respectively

$$M = \begin{pmatrix} e^{2i\pi\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\theta_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e^{2i\pi\theta} & 0 \\ 0 & e^{2i\pi\theta} \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} e^{2i\pi\theta} & 1 \\ 0 & e^{2i\pi\theta} \end{pmatrix}.$$

We call  $\theta_1$  and  $\theta_2$ , respectively  $\theta$  and  $\theta + n$  the *residues* of the connection at the pole  $\{x_1 = 0\}$ . In the last two cases of (A.12), we speak about a simple pole *with resonance*. If the local monodromy is a homothecy, that is to say in the second of the cases above, the pole is called a *projectively apparent singularity*.

**Remark A.33** *Note that if a flat rank 2 connection  $(\mathcal{E}, \nabla)$  has a projectively apparent singularity at  $\{x = 0\}$  :  $dY = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} \theta+n & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix} Y dx$ , then local monodromy at this singularity is a homothecy and thus projectively trivial.*

---

he only treated the case where all residues are in the interval  $[0, 1[$ . Thereby he excluded the case of projectively apparent singularities.

Moreover, the bimeromorphic gauge transformation  $\widehat{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x^n \end{pmatrix} Y$  is shifting the second eigenvalue  $\theta$  of the connection matrix to  $\theta + n$  and the resulting Riccati foliation is non-singular at  $\{x = 0\}$ .

Let  $(E, \nabla)$  be a flat logarithmic connection on  $M$ . An isomorphism  $\phi$  of  $\nabla$  on a chart  $U$  of  $M$ , given by holomorphic gauge transformations without monodromy is called a *symmetry* on  $U$ , if  $\phi$  conjugates the connection matrix to itself. Let  $U$  be a small chart containing a pole  $\{x_1 = 0\}$ . If  $\nabla$  is given on  $U$  by a system of standard form as in proposition A.31, then any symmetry on the punctured chart  $U^* = U \setminus \{x_1 = 0\}$  has the form respectively

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & \nu x_1^n \\ ox^{-n} & \mu \end{pmatrix} \text{ or } \begin{pmatrix} \lambda & \nu x_1^n \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad (\text{A.14})$$

where  $\lambda, \mu, \nu, o$  are constants. In the non-projectively apparent case and in the projectively apparent case with  $n = 0$ , any symmetry on the punctured chart  $U^*$  can thus be analytically continued to a symmetry on the unpunctured chart  $U$ . We notice further that in the projectively apparent case, a symmetry  $\phi$  on  $U^*$  can be continued analytically to  $U$  if, and only if,  $\phi$  keeps the *special line*  $L \subset \mathbf{C}^2$  invariant over  $U^*$ , where  $L$  is generated by  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  in the upper coordinates. In the case of tracefree connections, the special line  $L$  corresponds to the sub-vector space of bounded local solutions at  $\{x_1 = 0\}$ . Let us now come back to the Riemann-Hilbert correspondence. Let  $\mathcal{D} = \sum_{i=1}^m \mathcal{D}^i$  be a disjoint union of smooth irreducible and simply connected divisors  $\mathcal{D}^i$  of codimension 1 in  $M$ . For each  $i \in \{1, \dots, m\}$ , fix residues  $\theta_i^1, \theta_i^2$ . Then the monodromy representation establishes the so-called *Riemann-Hilbert map* from the set of integrable logarithmic rank 2 connections  $(E, \nabla)$  over  $M$  with divisor  $\mathcal{D}$  and residues  $\theta_i^1, \theta_i^2$  along  $\mathcal{D}^i$  for  $i \in \{1, \dots, m\}$  (modulo holomorphic gauge transformations) to the set of representations  $\rho$  from  $\pi_1(M^*)$  to  $\text{GL}(2, \mathbf{C})$  (modulo conjugacy) such that  $\rho(\gamma_i)$  has eigenvalues  $e^{2i\pi\theta_i^1}$  and  $e^{2i\pi\theta_i^2}$ , where  $\gamma_i$  describes a small positive loop around  $\mathcal{D}_i$ . Here  $M^* = M \setminus \mathcal{D}$ .

**Theorem A.3 (Riemann-Hilbert correspondence)** *Fix  $M, \mathcal{D}^i, \gamma_i$  and  $\theta_i^1, \theta_i^2$  for  $i \in \{1, \dots, m\}$  as above.*

1. *The Riemann-Hilbert map is surjective.*
2. *If for each  $i \in \{1, \dots, m\}$  we have  $\theta_i^1 - \theta_i^2 \notin \mathbf{Z}$  or  $\theta_i^1 - \theta_i^2 = 0$ , then the Riemann-Hilbert map is bijective.*
3. *If for some  $i \in \{1, \dots, m\}$  we have  $\theta_i^1 - \theta_i^2 \in \mathbf{Z}^*$ , then the restriction of the Riemann-Hilbert map to the set of connections  $(E, \nabla)$  with no*

*projectively apparent singularities is injective.*

**Proof:** Let us recall the main steps of the proof, written in more detail in [Bri04]. By the classical Riemann-Hilbert correspondence, we get a non-singular integrable rank  $r$  connection  $(E^* \rightarrow M^*, \nabla^*)$  over the punctured curve  $M^*$  having monodromy  $\rho$ . Recall that this connection is unique up to isomorphism.

Let  $\mathcal{U}^i$  be a germ of neighborhood of  $\mathcal{D}^i$  in  $M$ . In order to complete the connection  $(E^*, \nabla^*)$  at the polar set, let us now construct an integrable connection  $(E^i, \nabla^i)$  on  $\mathcal{U}^i$  having a logarithmic pole on  $\mathcal{D}^i$  and local monodromy  $\rho$ . Let  $E^i$  be the trivial vector bundle over  $\mathcal{U}^i$ . Since  $\mathcal{D}^i$  is smooth, it can be covered by local charts with coordinates  $(t, x)$  such that  $\mathcal{D}^i$  is given by  $\{x = 0\}$ . In each of these local coordinates we define  $\nabla^i$  by  $dY_i = \frac{A_i}{x} Y_i dx$ , where  $A_i$  has the standard form (A.12) corresponding to the prescribed residues  $\theta_1^i, \theta_2^i$ . If  $\theta_1^i - \theta_2^i \in \mathbf{Z}$ , the local monodromy determines whether we have to choose the projectively apparent or the non-projectively apparent standard form. On the intersection of two such local open sets, the coordinate transformation  $\varphi$  may change the connection matrix, but this conjugacy can be annihilated by a convenient gauge transformation  $\phi$ , according to proposition A.31. Since  $\mathcal{D}^i$  is simply connected, we can choose these gauge-coordinate transformations  $(\varphi, \phi)$  to glue the local connections into a connection  $(E^i \rightarrow \mathcal{U}^i, \nabla^i)$ , as desired. Again by proposition A.31, this connection is unique up to isomorphisms on  $\mathcal{U}^i$ .

Now on the intersection  $\mathcal{U}^{i*} = \mathcal{U}^i \cap M^*$ , the connections  $(E^*, \nabla^*)$  and  $(E^i, \nabla^i)$  are both non-singular, integrable connections with (local) monodromy  $\rho$ . By the classical Riemann-Hilbert correspondence, there is an isomorphism allowing to glue these two connections. In doing so for each  $i \in \{1, \dots, m\}$ , we finally obtain a logarithmic integrable connection  $(E \rightarrow M, \nabla)$  having the prescribed monodromy  $\rho$  and the prescribed residues along its poles  $\mathcal{D}^i$ . In the non-projectively apparent case or if  $\theta_1^i = \theta_2^i$ , this connection is still unique up to isomorphism. Indeed the gluing is uniquely defined up to a symmetry on the punctured set  $\mathcal{U}^{i*}$ , which can be continued analytically to an isomorphism on the unpunctured set  $\mathcal{U}^i$ .  $\square$

Let us look some closer at the case of projectively apparent singularities. In this case, we cannot associate a unique connection to a given monodromy representation and given residues in general. Indeed, let  $\mathcal{D}^{a_j}$  be a projectively apparent singularity with  $\theta_{a_j}^1 - \theta_{a_j}^2 \in \mathbf{Z}^*$ . Let  $(E, \nabla)$  be a flat logarithmic

mic connection and let  $\phi^{a_j}$  be the associated gluing between  $(E^*, \nabla^*)$  and  $(E^{a_j}, \nabla^{a_j})$  as in the above proof. We may suppose that  $\nabla^{a_j}$  is given over  $\mathcal{U}^{a_j}$  by a connection matrix in standard form (A.12). In composing  $\phi^{a_j}$  by symmetries on  $\mathcal{U}^{a_j*}$  of the form  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ cx_{a_j}^n & 1 \end{pmatrix}$ , we get a smooth family of connections, parametrized by  $c \in \mathbf{C}$ . Two connections in this family are conjugated over  $\mathcal{U}^{a_j*}$  by a symmetry which can not be continued to a gauge-transformation on  $\mathcal{U}^{a_j}$ . The family of connections with constant monodromy we have obtained is thus non-trivial except for the very special case where every symmetry can be continued analytically to an isomorphism of  $(E, \nabla)$  in restriction to  $X \setminus \mathcal{D}_{a_j}$ . In fact this happens only if there is only one singularity, which is the projectively apparent one, and the monodromy is trivial.

Yet we can restore the bijectivity in the Riemann-Hilbert correspondence for general logarithmic connections, if we associate special lines to every monodromy representation for the projectively apparent singularities it contains. More precisely, we first fix for each resonant divisor  $\mathcal{D}^j$  simple paths  $\delta_j : [0, 1] \rightarrow M^*$  from the chosen base point  $z_0$  of the fundamental group  $\pi_1(M^*, z_0)$  to a point in  $\mathcal{D}^j$ . We consider pairs  $(\rho, L)$ , where  $\rho$  is a monodromy representation of  $\pi_1(M^*, z_0)$  compatible with the fixed residues along  $\mathcal{D}^i$  for  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Denote by  $(a_1, \dots, a_\eta)$  the indices such that  $\mathcal{D}^{a_j}$  is a projectively apparent singularity for  $\rho$  and  $\theta_1^{a_j} - \theta_2^{a_j} \in \mathbf{Z}^*$ . Then  $L = (L_{a_1}, \dots, L_{a_\eta})$  shall be a  $\eta$ -tuple of lines  $L_{a_j} \subset \mathbf{C}^2$ . Now let  $(E, \nabla)$  be a flat logarithmic connection on  $M$  with polar divisor  $\mathcal{D}$  and projectively apparent singularities on  $\mathcal{D}^{a_1}, \dots, \mathcal{D}^{a_\eta}$ . Choose a fundamental solution  $S$  of  $\nabla$  in a neighborhood of  $z_0$ . Then there is a unique  $\eta$ -tuple  $L$  of lines  $L_{a_1}, \dots, L_{a_\eta}$  in the 2-dimensional vector space generated by  $S$ , such that the analytic continuation of  $S$  along  $\delta_{a_j}$  allows to identify  $L_{a_j}$  to the special line of  $\nabla$  near  $\delta_{a_j}(1)$ . Now if  $\rho$  is just the usual representation of monodromy with respect to our choice of  $S$ , then a base change  $\tilde{S} = AS$  with  $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$  acts on  $(\rho, L)$  in the following way

$$A \cdot (\rho, L) = (A\rho A^{-1}, AL).$$

The new defined Riemann-Hilbert map onto the set of pairs  $(\rho, L)$  as above (modulo the previous action of  $\mathrm{GL}(2, \mathbf{C})$ ) is a bijection.

**Remark A.34** *The notion of monodromy representations with additional information on the position of the special lines should not be confused with the notion of parabolic connections, which are connections with an additional structure. Stable parabolic connections on  $\mathbf{P}^1$  have a smooth moduli space, but the associated Riemann-Hilbert map is not injective (see [IIS06]).*



**Corollary A.35** *Let  $Z \subset M$  be a complex submanifold of  $M$  such that the inclusion map  $i : Z^* \rightarrow M^*$  with  $Z^* = Z \cap M^*$  provides an isomorphism  $i_* : \pi_1(Z^*, z_0) \xrightarrow{\sim} \pi_1(M^*, z_0)$  with  $z_0 \in Z^*$ . Assume that  $\mathcal{D}$  is transversal to  $Z$  and let  $\mathcal{D}_Z = \sum_{i=1}^m \mathcal{D}_Z^i$  be the induced divisor on  $Z$ .*

*Let  $(E_Z, \nabla_Z)$  be a flat logarithmic rank 2 connection over  $Z$  with polar set  $\mathcal{D}_Z$  and residues  $\theta_i^1, \theta_i^2$  along  $\mathcal{D}_Z^i$ , having monodromy  $\rho$ . Then  $(E_Z, \nabla_Z)$  extends to a flat logarithmic rank 2 connection  $(E, \nabla)$  over  $M$ , with polar set  $\mathcal{D}$  and residues  $\theta_i^1, \theta_i^2$  along  $\mathcal{D}^i$ , which is unique in the following sense.*

*Let  $(\tilde{E}, \tilde{\nabla}), (E, \nabla)$  be two such connections. Then each isomorphism  $\psi_Z : (\tilde{E}, \tilde{\nabla})|_Z \xrightarrow{\sim} (E, \nabla)|_Z$  over  $Z$ , extends to a unique isomorphism  $\psi : (\tilde{E}, \tilde{\nabla}) \xrightarrow{\sim} (E, \nabla)$  over  $M$ .*

**Proof:** By the Riemann-Hilbert correspondence there is a unique connection  $(E, \nabla)$  having the same monodromy representation and the same special lines at the projectively apparent singularities as  $(E_Z, \nabla_Z)$ .

Let  $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$  and  $(E, \nabla)$  be as above. By corollary A.30, we get a unique isomorphism  $\psi^* : (\tilde{E}, \tilde{\nabla})|_{M^*} \xrightarrow{\sim} (E, \nabla)|_{M^*}$  such that  $\psi^*|_{Z^*} = \psi_Z|_{Z^*}$ .

Now let  $\mathcal{U}^i$  be a small neighborhood of  $\mathcal{D}^i$  in  $M$ . Since  $(\tilde{E}, \tilde{\nabla})$  and  $(E, \nabla)$  have the same residues along  $\mathcal{D}^i$ , in appropriate coordinates they are both given by the same standard connection matrix (A.12). Now  $\psi^*$  defines a symmetry on  $\mathcal{U}^{i*}$  and thus extends holomorphically in the non-projectively apparent case to an isomorphism on  $\mathcal{U}^i$ , as desired. In the projectively apparent case however, the continuation  $\psi$  of  $\psi^*$  could a priori be meromorphic. Yet (A.14) shows that if  $\psi$  is not holomorphic on  $\mathcal{D}^i$ , then it has a pole all along the divisor  $\mathcal{D}^i$ . This is impossible since  $\psi|_Z = \psi_Z$  is holomorphic in  $\mathcal{D}_Z^i$ .  $\square$

If  $\nabla_0$  is logarithmic, this corollary provides a unique logarithmic, flat and locally trivial rank 2 connection  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  with polar set  $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}$  over the universal Teichmüller curve  $(\mathcal{X}_{\mathcal{T}}, \mathcal{D}_{\mathcal{T}})$ , such that

$$(E_{\tau_0} \rightarrow X_{\tau_0}, \nabla_{\tau_0}) = (E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0).$$

This defines the universal isomonodromic deformation in the logarithmic case. This universal object induces for each parameter  $\tau \in \mathcal{T}$  the unique connection  $(E_{\tau}, \nabla_{\tau})$  with simple poles in  $D_{\tau}$  which realizes the monodromy, the residues and the special lines for each projectively apparent singularity, all prescribed by the initial connection  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$ .



**Remark A.36** *For this construction of universal isomonodromic deformations of logarithmic connections with the help of the Riemann-Hilbert correspondence, we are using the method of B. Malgrange developped in [Mal83a]. It is also possible to use the local method developped in [Mal86], which generalizes easily to a global construction in the logarithmic case. This method avoids the Riemann-Hilbert correspondence and allows to obtain directly corollary A.35.*

c) **General case**

We are now going to construct the universal isomonodromic deformation in the case of multiple poles with methods similar to those developped by B. Malgrange in [Mal83a], [Mal83b] and [Mal86] for the genus 0-case (see also [Pal99] and [Kri02]). Like in the logarithmic case, we get a non-singular connection  $(\mathcal{E}^*, \nabla^*)$  over the punctured universal curve  $\mathcal{X}_T^*$  over the Teichmüller space  $\mathcal{T} = \text{Teich}(g, m)$ . We may also construct local connections  $(\mathcal{E}^i, \nabla^i)$  in order to stuff the gaps. But since the gluing will not be unique in general, we get additional parameters in the construction.

More explicetly, let  $(\mathcal{E}^* \rightarrow \mathcal{X}_T^*, \nabla^*)$  be the non-singular integrable connection on the punctured Teichmüller curve extending  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)|_{X_0^*}$  with  $X_0^* = X_0 \setminus D_0$ .

From the Bers construction of the universal Teichmüller curve (see [Hub06]) follows the existence of tubular neighborhoods  $\mathcal{U}_T^i$  of  $\mathcal{D}_T^i$ . In other words, there are global coordinates of  $\mathcal{D}_T^i$  in  $\mathcal{U}_T^i$ , *i.e.* holomorphic functions  $\xi_i : \mathcal{U}_T^i \rightarrow \mathbb{C}$  such that  $\text{div}(\xi_i) = \mathcal{D}_T^i$ . We may suppose that the function induced by  $\xi_i$  on  $\mathcal{U}_T^i \cap X_0$  is the coordinate function  $x_i$  on  $U_0^i = \mathcal{U}_T^i \cap X_0$ . We will define a local connection  $\nabla^i$  on the trivial bundle  $\mathcal{E}^i$  over the germification of such a tubular neighborhood  $\mathcal{U}_T^i$ . If  $\nabla_0$  is defined by a system  $dY = A(x_i)Ydx_i$  on  $U_0^i$ , which has a pole in  $\{x_i = 0\}$ , then  $\nabla^i$  shall be given on  $\mathcal{U}_T^i \times \mathbb{C}^2$  by the product connection  $dY = A(\xi_i)Yd\xi_i$ , having a pole in  $\mathcal{D}_T^i$ .

According to the classical Riemann-Hilbert correspondence, there is an isomorphism gluing  $\nabla^i$  and  $\nabla^*$  over the punctured chart  $\mathcal{U}_T^{i*} = \mathcal{U}_T^i \setminus \mathcal{D}_T^i$ . Let us now see in detail why this gluing might not be unique. We choose appropriate local coordinates, where the connections  $(\mathcal{E}^i, \nabla^i)$  and  $(\mathcal{E}^*, \nabla^*)$  are constant. Let  $(\tau, x_i)$  be a local coordinate on  $\mathcal{U}_T^{i*}$ . Let  $\mathcal{V} \times \mathbb{C}^2$  be a simply connected subchart of  $\mathcal{U}_T^{i*} \times \mathbb{C}^2$  where the connection  $\nabla^*$  is given by the system  $dY = 0$ . The connection  $\nabla^i$  will still be given by  $dY = A(x_i)Ydx_i$ . Let now  $Y \mapsto \phi(x_i)Y$  be the gauge transformation on  $\mathcal{V} \times \mathbb{C}^2$  defined by the restriction of the gluing isomorphism between the two connections. Let

$\varphi$  be a coordinate change on  $\mathcal{U}_T^i$  fixing  $\mathcal{D}_T^i$ . In our coordinates,  $\varphi$  is given by a holomorphic family  $(\varphi_\tau(x_i))_{\tau \in T}$  of holomorphic diffeomorphisms of the germ  $(\mathbf{C}, 0)$ . Now for each parameter  $\tau$ , the gauge-coordinate transformation  $(\varphi_\tau(x_i), \phi(x_i)Y)$  will also conjugate the two systems. We thereby define another gluing isomorphism on  $\mathcal{U}_T^{i*}$ .

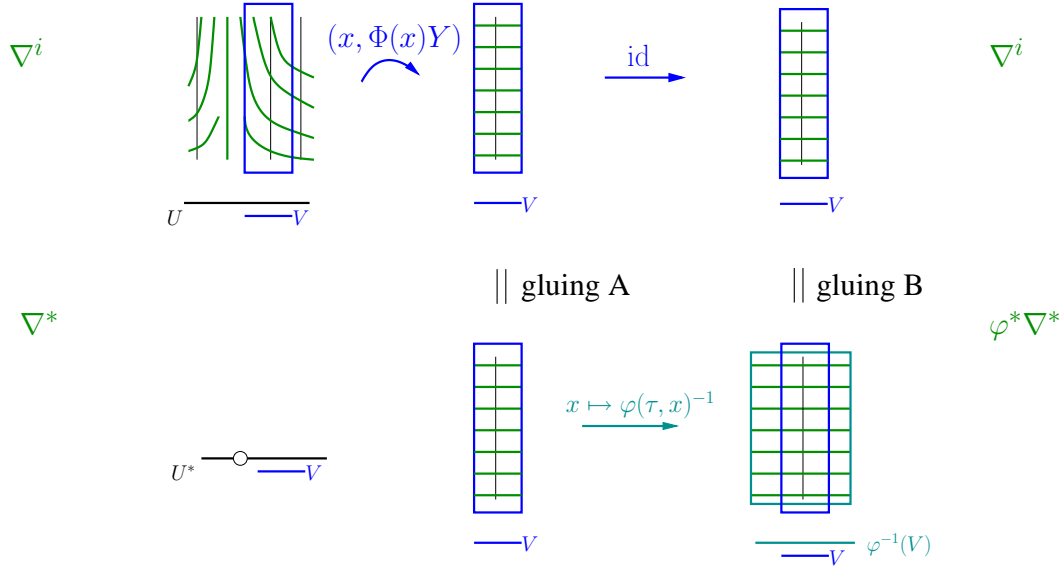


FIG. A.3 – Non-unicity in the gluing construction, due to diffeomorphisms of the base curve

In other words, it may be sufficient to choose another gluing between  $\mathcal{U}_T^i$  and the punctured base curve  $\mathcal{X}_T^*$  to get another flat connection  $(\mathcal{E}, \nabla)$ , which extends  $(E_0, \nabla_0)$  if  $\varphi_{\tau_0} = \text{id}$ .

We will now examine under which conditions this second gluing defines the same connection as the initial one. We will get the same connection for this second gluing if, and only if,  $\varphi^*(\mathcal{E}^i, \nabla^i)$  given by the system  $dY = A \circ \varphi^{-1}(x_i)Y d\varphi^{-1}(x_i)$  over  $\mathcal{V}$ , is conjugated to  $(\mathcal{E}^i, \nabla^i)$  over  $\mathcal{V}$  by a holomorphic gauge transformation  $Y \mapsto \tilde{\phi}(x_i)Y$ .

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{E}^*, \nabla^*) & & \varphi^*(\mathcal{E}^*, \nabla^*) \\
 \uparrow (x_i, \phi(x_i)Y) & \nearrow (\varphi^{-1}(x_i), \phi(x_i)Y) & \uparrow (x_i, \phi(x_i)Y) \\
 (\mathcal{E}^i, \nabla^i) & \xleftarrow{(x_i, \tilde{\phi}(x_i)Y)} & \varphi^*(\mathcal{E}^i, \nabla^i)
 \end{array}$$

Or equivalently, if there is a holomorphic gauge transformation  $\tilde{\phi}(x_i)$  such

that  $(\varphi^{-1}(x_i), \tilde{\phi}(\varphi^{-1}(x_i))Y)$  is conjugating  $(\mathcal{E}^i, \nabla^i)$  to itself.

$$\begin{array}{ccc}
 (\mathcal{E}^i, \nabla^i) & \xleftarrow{(x_i, \tilde{\phi}(x_i)Y)} & \varphi^*(\mathcal{E}^i, \nabla^i) \\
 & \nwarrow (\varphi^{-1}(x_i), \tilde{\phi}(\varphi^{-1}(x_i))Y) \quad \nearrow \varphi & \\
 & (\mathcal{E}^i, \nabla^i) &
 \end{array}$$

We have already seen that there is a unique connection resulting from such a gluing in the logarithmic case. In the general case, we have the following result.

In order to simplify notations, let us study the gluing between  $\varphi^*(\mathcal{E}^i, \nabla^i)$  and  $(\mathcal{E}^*, \nabla^*)$  in restriction to a fixed parameter.

**Lemma A.37** *Let  $\nabla^i$  be a connection on the trivial vector bundle  $E^i$  over a germ  $(\mathbf{C}, 0)$  with coordinate  $x$ , having a pole of order  $l$  at  $\{x = 0\}$ . Let  $\varphi(x)$  be a holomorphic diffeomorphism of  $(\mathbf{C}, 0)$  such that*

$$\varphi(x) \equiv \text{id}(x) \pmod{x^l}.$$

*Then there is a holomorphic gauge transformation  $\tilde{\phi}(x)$  such that  $(\varphi(x), \tilde{\phi}(\varphi(x))Y)$  is conjugating  $(E^i, \nabla^i)$  to itself.*

**Proof:** Choose coordinates  $(x, Y)$  such that  $(E^i, \nabla^i)$  is given by  $dY = A(x)Ydx$  with connection matrix

$$A(x) = \frac{1}{x^l} \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & -a(x) \end{pmatrix},$$

which has a pole of order  $l$ .

In order to prove this lemma, we shall use the path method of Jürgen Moser (cf. [Mos65], see also appendix 1 in [DZ05]). Our starting point is the connection  $(E_0^i, \nabla_0^i) = (E^i, \nabla^i)$  on  $(\mathbf{C}, 0)$ . We want to prove that it is conjugated to the connection  $(E_1^i, \nabla_1^i) = \varphi^*(E^i, \nabla^i)$  on  $(\mathbf{C}, 0)$  by a gauge-transformation  $\tilde{\phi}$ .

By  $(\varphi_s(x))_{s \in [0,1]}$  with  $\varphi_s(x) = s\varphi(x) + (1-s)\text{id}(x)$ , we define an analytic isotopy of holomorphic diffeomorphisms on  $(\mathbf{C}, 0)$  joining  $\varphi$  to the identity. It defines an analytic path of connections  $(E_s^i, \nabla_s^i)_{s \in [0,1]}$  by  $(E_s^i, \nabla_s^i) = \varphi_s^*(E^i, \nabla^i)$ . We want to find an analytic path of gauge-transformations  $(\phi_s(x))_{s \in [0,1]}$  such that  $(E_s^i, \nabla_s^i)$  is conjugated to  $(E_0^i, \nabla_0^i)$  by  $\phi_s$ .

Note that the analytic isotopy of diffeomorphisms  $(\varphi_s(x))_{s \in [0,1]}$  defines the flow of a time-dependent vector field  $v_s$  such that  $v_s(\varphi_s(x)) = \left[ \frac{\partial}{\partial s} \varphi_s(x) \right] \frac{\partial}{\partial x}$ . Indeed,  $(v_s)_{s \in [0,1]}$  is given by

$$v_s(x) = \varphi_s^* v_0(x),$$

where  $v_0(x) = (\varphi(x) - x) \frac{\partial}{\partial x}$ .

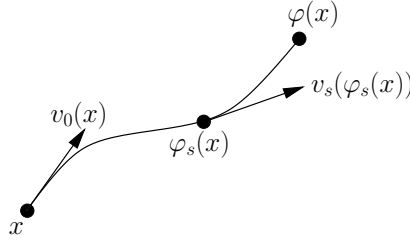


FIG. A.4 – Family of vector fields associated to the family of diffeomorphisms

By assumption,  $v_0$  has a zero of order  $l$  at  $x = 0$ . Then

$$v_s = x^l f_s(x) \frac{\partial}{\partial x}, \quad (\text{A.15})$$

where  $(f_s)_{s \in [0,1]}$  is an analytic isotopy of holomorphic functions.

Recall that the connection matrix  $A$  of the initial connection has a pole of order  $l$ . By consequence, a holomorphic vector field on  $E_0^i$  tangent to the connection  $\nabla_0^i$  is a holomorphic multiple of

$$\mathcal{W} = x^l \frac{\partial}{\partial x} + (a(x)y_1 + b(x)y_2) \frac{\partial}{\partial y_1} + (c(x)y_1 - a(x)y_2) \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

By (A.15), for each time  $s \in [0,1]$ , the vector field  $v_s$  thus lifts to the following vector field  $\mathcal{V}_s$  on  $E_0^i$  tangent to the connection  $\nabla_0^i$ :

$$\mathcal{V}_s = f_s(x) \mathcal{W}.$$

The flow of the time-dependent vector field  $\mathcal{V}_s$  defines an analytic isotopy of holomorphic gauge-coordinate-transformations of the form

$$(\Phi_s^{\mathcal{V}})_{s \in [0,1]} = (\varphi_s, \phi_s)_{s \in [0,1]}.$$

They are indeed gauge-transformations with respect to the  $Y$ -coordinate, since we are integrating in the Lie-algebra of gauge-transformations. By

construction, we have  $(\Phi_s^\mathcal{V})^*(E_0^i, \nabla_0^i) = (E_0^i, \nabla_0^i)$  for each time  $s \in [0, 1]$ . In other words, for each time  $s \in [0, 1]$ , the gauge-transformation  $\tilde{\phi}_s = \varphi_s^* \phi_s$  then conjugates the connection  $(E_s^i, \nabla_s^i)$  to  $(E_0^i, \nabla_0^i)$ , as desired. In particular, we found a gauge-coordinate transformation of the form

$$\Phi_1^\mathcal{V}(x, Y) = (\varphi(x), \phi(x)Y) = (\varphi(x), \tilde{\phi}(\varphi(x))Y)$$

such that  $(\Phi_1^\mathcal{V})^*(E_0^i, \nabla_0^i) = (E_0^i, \nabla_0^i)$  □

Inversely, if there is an analytic isotopy  $(\varphi_s(x), \phi_s(x)Y)_{s \in [0, 1]}$  with  $(\varphi_0, \phi_0) = (\text{id}, I)$  of holomorphic gauge-coordinate-transformations on  $E^i$  keeping  $\nabla^i$  invariant, then we can associate a time-dependent vector field tangent to the connection, as we will see in lemma A.42. This implies  $\varphi_s(x) \equiv \text{id}(x) \pmod{x^l}$ .

**Remark A.38** *It is possible that there are gauge-coordinate transformations on  $E^i$  keeping  $\nabla^i$  invariant and such that the induced coordinate change is not tangent to the identity. For example  $dY = \frac{1}{x}Ydx$  is invariant under the coordinate transformation  $x \mapsto e^{\frac{2i\pi}{l-1}}x$ . But the set of such coordinate transformations is discrete.*

In order to construct the universal isomonodromic deformation in the case of multiple poles, consider for each pole of order  $n_i > 0$  the set  $J^i = \text{Jets}^{<n_i}(\text{Diff}(\mathbf{C}, 0))$  of  $(n_i - 1)$ -jets of biholomorphisms of  $(\mathbf{C}, 0)$ . We identify  $J^i$  to  $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^{n_i-2}$ , where  $s = (s_1, \dots, s_{n_i-1})$  is associated to  $\varphi_s(x) = s_1x + s_2x^2 + \dots + s_{n_i-1}x^{n_i-1}$ . For a simple pole  $x_j = 0$  the set  $J^j$  is reduced to the identity-singleton.

Let  $J$  be the universal cover

$$J = \widetilde{J}^1 \times \dots \times \widetilde{J}^m$$

of the space of jets, where  $\widetilde{J}^i = \widetilde{\mathbf{C}}^* \times \mathbf{C}^{n_i-2}$ . Our parameter space  $T$  for the universal isomonodromic deformation will be

$$T = J \times \mathcal{T}.$$

**Remark A.39** *We consider a simply connected parameter space in order to avoid monodromy phenomena along the parameter space.*

Our universal curve  $(\mathcal{X}, \mathcal{D}) \rightarrow T$  shall be the product of the the space of jets  $J$  with the universal Teichmüller curve :

$$(\mathcal{X}, \mathcal{D}) = (J \times \mathcal{X}_T, J \times \mathcal{D}_T).$$

This curve will be the base curve of the universal isomonodromic deformation of  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$ .

As before, denote by  $\mathcal{X}^*$  the universal curve minus the distinguished points and their deformations  $\mathcal{D}^i = J \times \mathcal{D}_T^i$ . Let  $(\mathcal{E}^*, \nabla^*)$  be the unique non-singular integrable connection over  $\mathcal{X}^*$  having monodromy  $\rho$ . For  $t_0 = ((\text{id}, \dots, \text{id}), \tau_0) \in T$ , we have

$$(\mathcal{E}^*, \nabla^*)|_{t=t_0} = (E_0^*, \nabla_0^*).$$

We have again tubular neighborhoods  $\mathcal{U}^i = J \times \mathcal{U}_T^i$  of  $\mathcal{D}^i$  on  $\mathcal{X}$  and functions  $\xi_i : \mathcal{U}^i \rightarrow \mathbf{C}$ , identical to the Teichmüller coordinate, but seen on the bigger space, satisfying

$$\mathcal{D}^i = \text{div}(\xi_i).$$

On  $U_0^i = \mathcal{U}^i|_{t=t_0}$  with coordinate  $x_i$ , the initial connection induces a local connection  $(E_0^i, \nabla_0^i)$ , defined by a system

$$dY = A(x_i)Ydx_i$$

on the trivial vector bundle  $E_0^i$ .

Then on the tubular neighborhood  $\mathcal{U}^i$ , we define an integrable, locally constant connection  $(\mathcal{E}^i, \nabla^i)$  with polar set  $\mathcal{D}^i$ . Firstly, we define the connection

$$\tilde{\nabla}_0^i : dY = A(\xi_i)Yd\xi_i$$

on the trivial vector bundle  $\tilde{E}_0^i$  over  $\mathcal{U}^i = J \times \mathcal{U}_T^i$  as a product from the initial connection  $(E_0^i, \nabla_0^i)$ . Then for coordinates  $(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in J = \prod_{i=1}^m \tilde{J}^i$ , we define  $\nabla^i$  on the trivial vector bundle  $\mathcal{E}^i$  by

$$\nabla^i = \varphi_i^* \tilde{\nabla}_0^i$$

on  $U^i = J \times \mathcal{U}_T^i$ . Namely on  $\mathcal{U}^i$ , we define

$$\nabla^i : dY = A((\varphi_i)^{-1}(\xi_i))Yd((\varphi_i)^{-1}(\xi_i)).$$

On the trivial vector bundle  $E_0^i$ , we then have

$$\nabla_0^i = \nabla^i|_{t=t_0}.$$

We now have to glue  $(\mathcal{E}^i, \nabla^i)$  to  $(\mathcal{E}^*, \nabla^*)$ . Let  $\psi_0^i$  be the gluing isomorphism from  $(E_0^*, \nabla_0^*)$  to  $(E_0^i, \nabla_0^i)$ .

$$\begin{array}{ccc}
(E_0^*, \nabla_0^*) & \xrightarrow{\psi_0^i} & (E_0^i, \nabla_0^i) \\
\parallel & & \parallel \\
(\mathcal{E}^*, \nabla^*)|_{t=t_0} & & (\mathcal{E}^i, \nabla^i)|_{t=t_0}
\end{array}$$

On the base curve, we choose the natural, *i.e.* the identity gluing from  $\mathcal{X}^*$  to  $\mathcal{U}^i$  on the intersection  $\mathcal{U}^{i*} = \mathcal{U}^i \setminus \mathcal{D}^i$ . According to the classical Riemann-Hilbert correspondence and its corollary, there is an isomorphism  $\psi^i$  given by gauge transformations over  $\mathcal{U}^{i*}$ , which is gluing  $(\mathcal{E}^*, \nabla^*)$  to  $(\mathcal{E}^i, \nabla^i)$  and which extends the initial gluing isomorphism :

$$\psi^i|_{t=t_0} = \psi_0^i.$$

Gluing in this manner each of the local connections  $(\mathcal{E}^*, \nabla^*)$  to  $(\mathcal{E}^i, \nabla^i)$ , we constructed a flat integrable, locally constant tracefree connection  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$  over  $\mathcal{X} \rightarrow T$  with polar set  $\mathcal{D}$ , satisfying

$$(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)|_{t=t_0} = (E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0).$$

We remark that the so-defined universal isomonodromic deformation is global in reference to the Teichmüller space as well as in reference to the space of jets.

If the Teichmüller space  $\mathcal{T}$  has dimension  $3g - 3 + m \geq 0$ , then the dimension of the parameter space  $T$  of the universal isomonodromic deformation constructed above is  $3g - 3 + m + \sum_{i=1}^m (n_i - 1)$ . Thus

$$\dim(T) = 3g - 3 + n.$$

### A.3.2 Universal Property

Let us now prove the universal property theorem A.25 for the above constructed universal isomonodromic deformation  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)$ . Let  $(\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\nabla})$  be another isomonodromic deformation of the initial connection. Let  $n$  (resp.  $m$ ) be the number of poles counted with (resp. without) multiplicity, as before. We will denote by  $\sum_{i=1}^m n_i \tilde{\mathcal{D}}^i$  (resp.  $\tilde{\mathcal{D}}$ ) the divisor (resp. the reduced divisor) of  $(\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\nabla})$ . The reduced divisor of  $\nabla_0$  will be denoted by  $D_0$ . Using the product structure of the parameter space  $T = J \times \mathcal{T}$ , we will construct holomorphic maps  $(f, F)$  extending the initial isomorphism  $(f_0, F_0)$  of marked Riemann surfaces, such that

the diagram

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{X}} & \xrightarrow{F} & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{T} & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

commutes and such that, in restriction to each parameter  $\tilde{t} \in \tilde{T}$ , the map  $F$  induces an isomorphism of marked Riemann surfaces. Therefore we will firstly consider the universal curve respective to the deformation in the Teichmüller space, secondly the deformation respective to the jets. Then we will define an isomorphism  $\psi : (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\nabla}) \xrightarrow{\sim} F^*(\mathcal{E}, \nabla)$ , which extends the given isomorphism  $\psi_0 : (\tilde{E}_0, \tilde{\nabla}_0) \xrightarrow{\sim} F_0^*(E_0, \nabla_0)$ . Here  $\psi$  (resp.  $\psi_0$ ) are isomorphisms between connections on the same base curve  $\tilde{\mathcal{X}}$ , (resp.  $\tilde{X}_0$ ) and will thus be given by local gauge transformations. The maps  $\Psi$  (resp.  $\Psi_0$ ) are then obtained via  $F$  (resp.  $F_0$ ). The triple  $(f, F, \Psi)$  will be unique if  $(g, m)$  is different from  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  and  $(1, 0)$ . Finally we will study the default of unicity in the special cases.

1. (a) Denote again by  $\mathcal{X}_{\mathcal{T}} \rightarrow \mathcal{T}$  the universal Teichmüller curve respective to  $X_0$ , and by  $\mathcal{X} \rightarrow T$  the universal curve underlying the universal isomonodromic deformation of  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$ . Consider the Teichmüller classifying map  $h$  from  $(\tilde{T}, \tilde{t}_0)$  to  $(\mathcal{T}, \tau_0)$ . The map  $h$  is holomorphic and induces a holomorphic map  $H$ , making the following diagramm commute

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{X}} & \xrightarrow{H} & \mathcal{X}_{\mathcal{T}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{T} & \xrightarrow{h} & \mathcal{T} \end{array}$$

and such that  $H$  defines an isomorphism of marked Riemann surfaces in each fibre (see [Nag88], page 349).

**Remark A.40** *The cases  $g = 0$ ,  $m = 1, 2$  are not explicitly treated in [Nag88], but the result remains true in our context since any analytic fibre space whose fibres are all holomorphically equivalent to one compact connected complex manifold is locally trivial (see [FG65]).*

- (b) From the tubular neighborhoods in the Teichmüller curve, via  $F$  we get tubular neighborhoods  $\tilde{\mathcal{U}}^i$  of  $\tilde{\mathcal{D}}^i$  and thus the connection  $(\tilde{\mathcal{E}}_0^i, \tilde{\nabla}_0^i)$ , induced by the initial connection  $(\tilde{E}_0, \tilde{\nabla}_0)$  on  $\tilde{\mathcal{U}}^i \cap X_0$ , can be considered as a product connection on  $\tilde{\mathcal{U}}^i$ . We will now construct a classifying



map in the space of local jets. From the point of view of the product connection  $(\tilde{E}_0^i, \tilde{\nabla}_0^i)$ , the gluing isomorphism between  $(\tilde{\mathcal{E}}^i, \tilde{\nabla}^i)$  and  $(\tilde{\mathcal{E}}^*, \tilde{\nabla}^*) = (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\nabla})|_{\tilde{X}^*}$  will only depend on the gluing of  $\tilde{\mathcal{U}}^i$  to  $\tilde{X}^*$  in the base curve. From now on, we will forget the variable  $Y$  in the sense that we only indicate whether or not there are gauge-transformations conjugating two given connections.

Let  $(\tilde{t}, x_i)$  be a local coordinate on  $\tilde{\mathcal{U}}^i$  defined in a small neighborhood of  $\tilde{t}_0$ . Assume that  $\tilde{D}^i$  is given in these coordinates by  $\{x_i = 0\}$ .

**Lemma A.41** *There is coordinate-transformation  $(\tilde{t}, x_i) \mapsto (\tilde{t}, \tilde{\varphi}_i(\tilde{t}, x_i))$  fixing  $\tilde{D}^i$  such that locally on the considered open set of  $\tilde{\mathcal{U}}^i$ , we have*

$$\begin{cases} \text{id} = \tilde{\varphi}_i|_{\tilde{t}=\tilde{t}_0} \\ \tilde{\nabla}^i = (\tilde{\varphi}_i)^* \tilde{\nabla}_0^i, \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

where  $\tilde{\nabla}_0^i$  is considered as a connection on the trivial bundle  $\tilde{\mathcal{E}}_0^i \times \tilde{T}$  over  $\tilde{\mathcal{U}}^i$ .

**Proof:** According to the local constancy, there are local gauge-coordinate-transformations

$$(\tilde{t}, x_i, Y_i) \mapsto (\tilde{t}, \varphi_i(\tilde{t}, x_i), \phi_i(\tilde{t}, x_i) \cdot Y_i)$$

trivializing the connection  $\tilde{\nabla}^i$  in the parameter  $\tilde{t}$  and fixing  $\tilde{\mathcal{D}}_i$ . Then

$$(\tilde{t}, x_i, Y_i) \mapsto (\tilde{t}, (\varphi_i)^{-1}(\tilde{t}_0, \varphi_i(\tilde{t}, x_i)), (\phi_i)^{-1}(\tilde{t}_0, x_i) \cdot \phi_i(\tilde{t}, x_i) \cdot Y_i)$$

is satisfying the conditions (A.16).  $\square$

Now let us consider  $\tilde{\varphi}_i(\tilde{t}, x_i)$  as a holomorphic family of holomorphic diffeomorphisms  $\tilde{\varphi}_i^{\tilde{t}}(x_i)$  of  $(\mathbf{C}, 0)$ .

**Lemma A.42** *Let  $\tilde{\varphi}_i^{\tilde{t}}$  and  $\tilde{\tilde{\varphi}}_i^{\tilde{t}}$  be two holomorphic families of biholomorphisms satisfying (A.16). Then they are equivalent modulo  $x_i^{n_i}$ .*

**Proof:** Consider the biholomorphism  $\varphi_{\tilde{t}} = (\tilde{\varphi}_i^{\tilde{t}})^{-1} \circ \tilde{\tilde{\varphi}}_i^{\tilde{t}}$ . Then  $\varphi_{\tilde{t}}^* \tilde{\nabla}_0^i = \tilde{\nabla}_0^i$  for each parameter  $\tilde{t} \in \tilde{T}$ . This means there is a gauge transformation  $Y_i \mapsto \phi_{\tilde{t}}(x_i) \cdot Y_i$  such that the gauge-coordinate-transformation

$(\varphi_{\tilde{t}}, \phi_{\tilde{t}})$  is conjugating the system

$$dY_i = \frac{1}{x_i^{n_i}} A(x_i) Y_i dx_i$$

defining  $\tilde{\nabla}_0^i$  to itself.

Let us now fix a parameter  $\tilde{t}_1 \in \tilde{T}$ . Let  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \tilde{T}$  be an analytic path with  $\gamma(0) = \tilde{t}_0$ ,  $\gamma(1) = \tilde{t}_1$ . Now  $(\varphi_{\gamma(s)}, \phi_{\gamma(s)})_{s \in [0, 1]}$  is an analytic isotopy of gauge-coordinate-transformations keeping  $\tilde{\nabla}_0^i$  invariant. Moreover, this isotopy contains  $(\text{id}, I)$  for the initial parameter  $s = 0$ . As in lemma A.37, we may associate to this isotopy the time-dependent vector field

$$\mathcal{V}_s = \left[ \frac{\partial}{\partial s} (\varphi_{\gamma(s)}, \phi_{\gamma(s)}) \right]$$

which is tangent to the connection for each time  $s \in [0, 1]$ . We may also consider the time-dependent vector field  $v_s \circ \varphi_{\gamma(s)}(x_i) = \left[ \frac{\partial}{\partial s} \varphi_{\gamma(s)}(x_i) \right]$  on the base curve. By construction, for each time  $s \in [0, 1]$ , the vector field  $v_s$  lifts to a holomorphic vector field  $\mathcal{V}_s = v_s + f(s, x_i) A Y_i$  tangent to the connection  $\tilde{\nabla}_0^i$ .

$$\begin{array}{ccc} (\varphi_{\gamma(s)})_{s \in [0, 1]} & \rightsquigarrow & (v_s)_{s \in [0, 1]} \\ & & \downarrow \\ (\varphi_{\gamma(s)}, \phi_{\gamma(s)})_{s \in [0, 1]} & \rightsquigarrow & (\mathcal{V}_s)_{s \in [0, 1]} \end{array}$$

By consequence,  $v_s \circ \varphi_{\gamma(s)}(x_i)$  has to be zero modulo  $x_i^{n_i}$  for each  $s \in [0, 1]$ . Since  $v_s$  is analytic and  $v_0$  is the identity, it follows from the construction that  $\varphi_{\gamma(s)}$  is equal to the identity modulo  $x_i^{n_i}$ . In particular,

$$\varphi_{\tilde{t}_1} = \text{id} \mod x_i^{n_i}.$$

□

Inversely, if  $\tilde{\varphi}_i$  is satisfying (A.16) and  $\tilde{\tilde{\varphi}}_i$  is a holomorphic family of diffeomorphisms with

$$\tilde{\tilde{\varphi}}_i \equiv \tilde{\varphi}_i \mod x_i^{n_i},$$

then  $\tilde{\tilde{\varphi}}_i$  also satisfies (A.16), according to lemma A.37.

For each parameter  $\tilde{t}$  in a neighborhood  $W_0$  of the initial parameter  $\tilde{t}_0$  in  $\tilde{T}$ , we can find a biholomorphism  $\tilde{\varphi}_i(\tilde{t}, x_i)$  as in lemma A.42, whose  $(n_i - 1)$ -jet is uniquely defined according to lemma A.42. The map associating to a parameter in  $\tilde{T}$  the associated  $(n_i - 1)$ -jet of diffeomorphisms can be analytically continued along any path in  $\tilde{T}$ . Indeed, choose an open set  $W_1$  in the germ  $\tilde{\mathcal{U}}^i$ , such that the connection  $\tilde{\nabla}^i$  is locally trivial on this open set up to a convenient gauge-coordinate transformation and such that  $W_0 \cap W_1 \neq \emptyset$ . Choose a parameter  $t_1 \in W_0 \cap W_1$ , and let  $\tilde{\varphi}_{t_1}$  be the associated diffeomorphism. Recall that  $\tilde{\nabla}_0^i$  can be seen naturally as a connection on  $\tilde{\mathcal{U}}^i$ . Like in the above lemmas, we see that on  $W_1$ , there is a family of diffeomorphisms  $\tilde{\varphi}_i$  such that

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{t_1} = \tilde{\varphi}_i|_{\tilde{t}=\tilde{t}_1} \\ \tilde{\nabla}^i = (\tilde{\varphi}_i)^* \tilde{\nabla}_0^i, \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

and the  $(n_i - 1)$ -jet of this family is unique. In particular, it continues analytically the family of diffeomorphisms on  $W_0$ . Since  $\tilde{T}$  is simply connected by definition of isomonodromic deformations, we can associate, by analytic continuation, to each parameter  $\tilde{t} \in \tilde{T}$  a biholomorphism  $\tilde{\varphi}_i(\tilde{t}, x_i)$ , such that the following map is well-defined and holomorphic :

$$\begin{aligned} g^i : \quad \tilde{T} &\longrightarrow J^i \\ \tilde{\varphi}_i &\longmapsto \tilde{\varphi}_i \mod x_i^{n_i} . \end{aligned}$$

The map

$$g : (\tilde{T}, \tilde{t}_0) \xrightarrow{(g^1, \dots, g^m)} (J^1 \times \dots \times J^m, (\text{id}, \dots, \text{id}))$$

constructed in that way can be lifted to the universal cover  $J = \tilde{J}^1 \times \dots \times \tilde{J}^m$ . Finally, denote by  $G$  the trivial lift

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{X}} & \xrightarrow{G} & J \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{T} & \xrightarrow{g} & J, \end{array}$$

mapping fibres to singletons.

Since  $T = J \times \mathcal{T}$ , we obtain a canonical holomorphic mapping

$$f : (\tilde{T}, \tilde{t}_0) \xrightarrow{(g,h)} (T, t_0),$$

where  $t_0 = ((\text{id}, \dots, \text{id}), \tau_0)$ . Recall that the universal curve  $\mathcal{X}$  is constructed as a product  $\mathcal{X} = J \times \mathcal{X}_{\mathcal{T}}$ . The Teichmüller map  $H : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{T}}$  thus lifts via  $G$  to a holomorphic map  $F : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}$ , such that

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{X}} & \xrightarrow{F=(G,H)} & \mathcal{X} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{T} & \xrightarrow{f=(g,h)} & T \end{array}$$

commutes and  $F$  defines an isomorphism of marked Riemann surfaces in each fibre. Moreover, the maps  $(f, F)$  are extending  $(f_0, F_0)$ , by construction.

2. We want to extend the initial isomorphism  $\psi_0 : (\tilde{E}_0, \tilde{\nabla}_0) \rightarrow F_0^*(E_0, \nabla_0)$  to an isomorphism  $\psi : (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\nabla}) \rightarrow F^*(\mathcal{E}, \nabla)$ , both given by gauge transformations in appropriate coordinates of the common base curve  $\tilde{X}_0$ , respectively  $\tilde{\mathcal{X}}$ . Therefore we decompose  $\psi_0$  into an isomorphism  $\psi_0^* : (\tilde{E}_0^*, \tilde{\nabla}_0^*) \rightarrow F_0^*(E_0^*, \nabla_0^*)$  on the punctured base curve  $\tilde{X}_0^* = \tilde{X}_0 \setminus \tilde{D}_0$ , and isomorphisms  $\psi_0^i$  defined in neighborhoods of the poles via trivial gluing isomorphisms  $\tilde{\Phi}_0^i = (\text{id}, I)$  respectively  $\Phi_0^i = (\text{id}, I)$  :

$$\begin{array}{ccccc} F_0^*(E_0, \nabla_0) & & F_0^*(E_0^*, \nabla_0^*) & \xrightarrow{\Phi_0^i} & F_0^*(E_0^i, \nabla_0^i) \\ \uparrow \psi_0 & \rightsquigarrow & \uparrow \psi_0^* & & \uparrow \Psi_0^i \\ (\tilde{E}_0, \tilde{\nabla}_0) & & (\tilde{E}_0^*, \tilde{\nabla}_0^*) & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_0^i} & (\tilde{E}_0^i, \tilde{\nabla}_0^i) \end{array}$$

We may decompose  $(\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\nabla})$  (resp.  $F^*(\mathcal{E}, \nabla)$ ) into the connections  $(\tilde{\mathcal{E}}^*, \tilde{\nabla}^*)$  (resp.  $F^*(\mathcal{E}^*, \nabla^*)$ ) induced on the punctured base curve  $\tilde{\mathcal{X}}^* = \tilde{\mathcal{X}} \setminus \mathcal{D}$ , and local connections  $(\tilde{\mathcal{E}}^i, \tilde{\nabla}^i)$  (resp.  $F^*(\mathcal{E}^i, \nabla^i)$ ) on  $\tilde{\mathcal{U}}^i$ , together with gluing isomorphisms  $\tilde{\Phi}_i = (\tilde{\varphi}_i, \tilde{\phi}_i)$  (resp.  $\Phi_i = (\varphi_i, \phi_i)$ ). According to lemma A.41 we may suppose that in a small neighborhood of the initial parameter in  $\mathcal{U}^i$  respectively  $\tilde{\mathcal{U}}^i$  we have

$$\begin{cases} (\tilde{\varphi}_i, \tilde{\phi}_i)|_{\tilde{t}=\tilde{t}_0} = (\text{id}, I) & \text{resp.} & (\varphi_i, \phi_i)|_{t=t_0} = (\text{id}, I) \\ \tilde{\nabla}^i = \tilde{\nabla}_0^i & \text{resp.} & F^*(\nabla^i) = F_0^* \nabla_0^i, \end{cases}$$

where  $\tilde{\nabla}_0^i$  (resp.  $F_0^* \nabla_0^i$ ) are seen on the vector bundle  $\tilde{E}_0^i \times \tilde{T}$  (resp.  $F_0^*(E_0^i) \times \tilde{T}$ ) over  $\tilde{\mathcal{U}}^i$ . Moreover, we may suppose by lemma A.37 that  $\tilde{\varphi}_i$  and  $\varphi_i$  are  $(n_i - 1)$ -jets of diffeomorphisms with respect to the same coordinates on the base curve. In the new coordinates, the connection matrices of  $\tilde{\nabla}^i$  and  $F^*(\nabla^i)$  do not depend on the parameter. Thus  $\psi_0^i$  extends trivially into an isomorphism

$$\begin{cases} \psi^i : (\tilde{\mathcal{E}}^i, \tilde{\nabla}^i) \xrightarrow{\sim} F^*(\mathcal{E}^i, \nabla^i) \\ \psi^i|_{\tilde{t}=\tilde{t}_0} = \psi_0^i, \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

given by gauge-coordinate transformations with respect to the coordinate transformation  $\varphi_i \circ (\tilde{\varphi}_i)^{-1}$ . By lemma A.42, we know a posteriori that  $\tilde{\varphi}_i = \varphi_i$ . In other words, we are still considering a common atlas on the base curve, and  $\psi^i$  is given by gauge-transformations.

Moreover,  $\psi^i$  is the unique isomorphism satisfying (A.18) with respect to our coordinates. Indeed, the first condition implies that such an isomorphism may not depend on the parameter. Thus the second condition provides uniqueness. Recall that  $\psi^i$  is given a priori only in a small neighborhood of the initial parameter. Yet the uniqueness of  $\psi^i$  implies that  $\psi^i$  can be continued to an isomorphism over  $\tilde{\mathcal{U}}^i$  following the analytic continuation of the diffeomorphism on the base curve.

Since  $(\tilde{\mathcal{E}}^*, \tilde{\nabla}^*)$  and  $F^*(\mathcal{E}^*, \nabla^*)$  are two non-singular connections defined on the same base curve and having the same monodromy representation, the Riemann-Hilbert correspondence provides a unique extension  $\psi^*$  of the isomorphism  $\psi_0^*$ , both given by gauge transformations, such that

$$\begin{cases} \psi^* : (\tilde{\mathcal{E}}^*, \tilde{\nabla}^*) \xrightarrow{\sim} F^*(\mathcal{E}^*, \nabla^*) \\ \psi^*|_{\tilde{t}=\tilde{t}_0} = \psi_0^*. \end{cases}$$

We get a commuting diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 F^*(\mathcal{E}^*, \nabla^*) & \xrightarrow{\Phi^i} & F^*(\mathcal{E}^i, \nabla^i) \\
 \uparrow \psi^* & & \uparrow \psi^i \\
 (\tilde{\mathcal{E}}^*, \tilde{\nabla}^*) & \xrightarrow{\tilde{\Phi}^i} & (\tilde{\mathcal{E}}^i, \tilde{\nabla}^i)
 \end{array}
 \quad \rightsquigarrow \quad
 \begin{array}{ccc}
 & & F^*(\mathcal{E}, \nabla) \\
 & & \uparrow \psi \\
 & & (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\nabla}).
 \end{array}$$

inducing a unique isomorphism  $\psi$ , given by gauge transformations, such that

$$\begin{cases} \psi : (\tilde{\mathcal{E}}, \tilde{\nabla}) \xrightarrow{\sim} F^*(\mathcal{E}, \nabla) \\ \psi|_{\tilde{t}=\tilde{t}_0} = \psi_0. \end{cases}$$

3. The above argumentation has shown that the triple  $(f, F, \Psi)$  is unique if  $(h, H)$  is unique. Now the classifying map  $h$  is always unique, whereas  $H$  is unique if, and only if, there is no non-trivial isomorphism of the universal Teichmüller curve fixing  $(X_0, D_0)$ . This is precisely the case when  $(g, m)$  is different from  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  and  $(1, 0)$ .
4. In the cases  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  and  $(1, 0)$  however, the map  $H$  may be composed by non-trivial automorphisms of the marked curve.

In the case  $(0, 0)$ , the connection  $(E_0, \nabla_0)$  is the trivial connection on the trivial vector bundle on  $\mathbf{P}^1$  and any isomonodromic deformation of this connection is trivial.

In the cases  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$  with  $n \geq 3$ , it is possible to define a normalized parameter space  $J$ , and there is a unique map  $H$  such that the image of the map  $G$  is contained in this normalized space (see section A.3.3).

In the case  $(1, 0)$ , it is possible to refer to the case  $(1, 1)$  and thus to restore unicity, by fixing a section  $\mathcal{T} \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{T}}$  (see section A.3.3).

### A.3.3 Special cases with automorphisms

If  $3g - 3 + m$  is negative, then the dimension of the Teichmüller space is zero. Moreover, in the special case  $g = 1$ ,  $n = 0$ , the dimension of the Teichmüller space is one. The parameter space of the isomonodromic deformation constructed above then is strictly greater than  $3g - 3 + n$ . On the other hand, there are one-parameter families of automorphisms of the punctured curve exactly in these

cases. Depending on the context, it may be of interest to take into account those automorphisms.

Assume now  $3g-3+n \geq 0$ . In this case, we may restore the universal property of the universal isomonodromic deformation.

**1. The case  $g=0$**

In the case of the Riemann sphere we will be able to diminish the dimension of  $T$  by means of a quotient in order to get dimension  $\sup\{0, 3g-3+n\}$  again. Let us now consider the universal isomonodromic deformation for

$$m-3 < 0, \text{ but } n-3 > 0.$$

Consider a tracefree rank 2 connection  $(\mathcal{E}, \nabla)$  on the Riemann sphere with no poles except 0 and  $\infty$ , with coordinates  $x$  in a neighborhood of 0 and  $\tilde{x}$  in a neighborhood of  $\infty$ , where  $\tilde{x} = \frac{1}{x}$ .

**a) The case  $m=1$**

Let us consider the case when  $\nabla$  has only one pole of multiplicity  $n$ . We may suppose this pole is  $\{x = 0\}$ . Now apply the construction of the previous section, but in restriction to the following parameter space of local jets fixing zero :

$$J = \{1\} \times \{0\} \times \mathbf{C}^{n-3}.$$

The group of automorphisms  $\text{Aut}(\mathbf{P}^1, 0)$  of the marked surface  $(\mathbf{P}^1, 0)$  acting on our gluing construction is  $\{\frac{\lambda x}{1-\mu x} \mid \lambda \in \mathbf{C}^*, \mu \in \mathbf{C}\}$ . Such an isomorphism is acting on a jet

$$x + s_3 x^3 + \dots + s_{n-1} x^{n-1}$$

in the following way :

$$\lambda x + \lambda \mu x^2 + \sum_{i=3}^{n-1} \left( \lambda \mu^{i-1} + \sum_{l=3}^i s_l \binom{i-1}{l-1} \lambda^l \mu^{i-l} \right) x^i.$$

With the help of the automorphisms we may thus recover the whole space of  $(n-1)$ -jets from the previous section

$$\text{Aut}(\mathbf{P}^1, 0) \times J \cong \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^{n-2}$$

and their universal covers will be naturally identified. Yet this new defined isomonodromic deformation will have the universal property.

b) **The case  $m=2$** 

Let  $n_0$  (resp.  $n_\infty$ ) be the multiplicity of the poles of the connection  $\nabla$  at zero (resp. at infinity), such that  $n = n_0 + n_\infty$ . We assume again  $n_0 > 1$ . In this case, we restrict the universal isomonodromic deformation to the universal cover of the set  $J^0 \times J^\infty$  of local jets, where

$$J^0 = \{1\} \times \mathbf{C}^{n_0-2} \quad J^\infty = \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^{n_\infty-2}.$$

The group of automorphisms of the marked surface  $\mathbf{P}^1$  fixing zero and infinity is then  $\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbf{C}^*\}$ . Such an isomorphism acts on a pair of jets

$$(x + s_2^0 x^2 + \dots + s_{n_0-1}^0 x^{n_0-1}, s_1^\infty \tilde{x} + s_2^\infty \tilde{x}^2 + \dots + s_{n_\infty-1}^\infty \tilde{x}^{n_\infty-1})$$

in the following way :

$$(\lambda x + \lambda^2 s_2^0 x^2 + \dots + \lambda^{n_0-1} s_{n_0-1}^0 x^{n_0-1}, \frac{s_1^\infty}{\lambda} \tilde{x} + \frac{s_2^\infty}{\lambda^2} \tilde{x}^2 + \dots + \frac{s_{n_\infty-1}^\infty}{\lambda^{n_\infty-1}} \tilde{x}^{n_\infty-1})$$

Again we recover the whole parameter space of the previous section and restore the universal property.

2. **The case  $g=1, m=0$** 

Recall that in this case the universal isomonodromic deformation is constructed by suspension. We obtain a non-singular connection on the universal curve having parameter space  $\mathbf{H}$ . Notice that this connection is invariant under the automorphisms  $z \mapsto z + \lambda(\tau)$  of the universal curve

$$\mathbf{H} \times \mathbf{C} / \sim,$$

where  $(\tau, z) \sim (\tau, z + k_1 \tau + k_2)$ . As a method to restore the universal property, we may fix a supplementary point on the base curve. Let us fix the zero-section  $(\tau, 0)$  of the universal curve for instance.

**A.4 Explicit example**

If the initial connection is an irreducible, tracefree rank 2 connection with four poles (counted with multiplicity) over  $\mathbf{P}^1$  and the underlying vector bundle is trivial, then its universal isomonodromic deformation implicitly defines a solution  $q(t)$  of the Painlevé equation with the associated initial parameters. Indeed, the vector bundle  $\mathcal{E}$  underlying the universal isomonodromic deformation is trivial in restriction to a generic parameter  $t$ , according to corollary A.1. The vector bundle



$\mathcal{E}$  can be trivialized globally by bimeromorphic gauge transformations, which are in fact holomorphic in restriction to the parameter space  $T \setminus \Theta$  (see paragraph 3 in [Mal83a], for example), where the *exceptional set*  $\Theta$  is a strict closed analytic subset corresponding to the set of parameters  $t$ , such that the associated vector bundle  $E_t$  is non-trivial, more precisely  $E_t = \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O}(-1)$ . Once the vector bundle  $\mathcal{E}$  is trivialized, one obtains  $q(t)$  directly from the system matrix, up to a normalization. For completeness, we recall that such a solution  $q(t)$  may have poles beyond the exceptional set  $\Theta$  in general. The parameter space on which the Painlevé equations are defined is the Riemann sphere minus the polar set of the initial connection. Yet the solutions of these equations are well defined only on the universal cover of this parameter space. We notice that our construction provides consistent parameter spaces (see [Oka86]).

poles $x_1, \dots, x_m$	multiplicity $n_1, \dots, n_m$	parameter space $T$	Painlevé equation
$0, 1, t, \infty$	$1, 1, 1, 1$	$\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\} = \mathbf{H}$	$P_{\text{VI}}$
$0, 1, \infty$	$2, 1, 1$	$\widetilde{\mathbf{C}^*}$	$P_{\text{V}}$
$0, \infty$	$3, 1$	$\mathbf{C}$	$P_{\text{IV}}$
$0, \infty$	$2, 2$	$\widetilde{\mathbf{C}^*}$	$P_{\text{III}}$
$0$	$4$	$\mathbf{C}$	$P_{\text{II}}$

Let us construct an example of an isomonodromic deformation of an irreducible tracefree rank 2 connection with four simple poles over  $\mathbf{P}^1$ , which thus will correspond to a solution of a Painlevé VI equation, where we describe explicitly the exceptional set  $\Theta$ .

**Example A.43** *Consider the connection on the trivial bundle over the  $\mathbf{P}^1$  given in a neighborhood of the origin by the system*

$$dY = \begin{pmatrix} -\frac{\theta}{2x} & 0 \\ 0 & \frac{\theta}{2x} \end{pmatrix} Y dx, \quad (\text{A.19})$$

with  $\theta \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ . In order to get a fuchsian system with four poles in  $0, 1, t$  and  $\infty$ , we apply two elementary transformations centered in  $(1, (1, 1))$  and  $(t, (1, s))$  in  $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^2$  and we renormalize in order to get a tracefree connection again :

$$\tilde{Y} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-t)(1-s)}} \begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} Y.$$

We thereby define an isomonodromic deformation parametrized by the universal cover  $\pi : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$  if, and only if,  $(t, s(t))$  is a leaf of the Riccati

foliation  $dy = \frac{\theta}{x}ydx$  associated to (A.19). Thus we have to ask  $s(t) = ct^\theta$  for some constant  $c$ . Now the self-intersection number of a section  $\sigma$  of the associated  $\mathbf{P}^1$ -bundle is shifted by  $-1$  (resp.  $+1$ ) by an elementary transformation centered on a point lying on  $\sigma$  (resp. not lying) on  $\sigma$ . Thus the minimal self-intersection number remains zero if, and only if,  $s$  is different from 1. Otherwise the minimal self-intersection number becomes  $-2$ . In other words, the degree of stability of the vector bundle  $E_{\tilde{t}}$  with  $\tilde{t} \in \mathbf{H}$  along this isomonodromic deformation is

$$\kappa(E_{\tilde{t}}) = \begin{cases} -2 & \text{if } t \in \{\exp((n - \tilde{c})\frac{2i\pi}{\theta}), n \in \mathbf{Z}\} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

where  $c = \exp(\tilde{c}2i\pi)$ , and  $t = \pi(\tilde{t})$ . If we calculate the associated solution of the

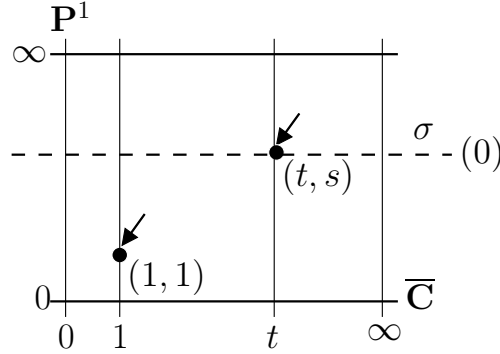


FIG. A.5 – Construction of an isomonodromic deformation by elementary transformations with parameter

Painlevé VI equation (see [Lor07]), we have to normalize the system such that the residue matrix  $A_\infty$  at infinity is diagonal.

$$\tilde{\tilde{Y}} = \frac{1}{\sqrt{1-s}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix} \tilde{\tilde{Y}}.$$

By these birational gauge-transformations we get a system  $d\tilde{\tilde{Y}} = A\tilde{\tilde{Y}}$  where the  $dx$ -part of the matrix  $A$  is the following :

$$\frac{\theta}{2x} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dx + \frac{\frac{(1-t)}{(1-s)^2}}{x(x-1)(x-t)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1-s^2)x + \theta s(1-t) & -(\theta-1)(1-s)x + \theta(t-s) \\ -(\theta+1)s(1-s)x + \theta s(1-st) & \frac{1}{2}(1-s^2)x - \theta s(1-t) \end{pmatrix} dx$$

The zero of the  $(1, 2)$ -coefficient of  $A$  then is the solution

$$q(t) = \frac{\theta}{\theta - 1} \frac{t - s}{1 - s}$$

of the associated Painlevé VI equation :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q}{dt^2} = & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{q} + \frac{1}{q-1} + \frac{1}{q-t} \right) \left( \frac{dq}{dt} \right)^2 - \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{q-t} \right) \frac{dq}{dt} \\ & + \frac{q(q-1)(q-t)}{2t^2(t-1)^2} \left( \kappa_\infty^2 - \kappa_0^2 \frac{t}{q^2} + \kappa_1^2 \frac{t-1}{(q-1)^2} + (1 - \kappa_t^2) \frac{t(t-1)}{(q-t)^2} \right) \end{aligned}$$

with coefficients

$$(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_t, \kappa_\infty) = (\theta, 1, 1, \theta - 1).$$

## A.5 Proof of the main result

Let  $(P_t \rightarrow X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T}$  be the projectivization of the universal isomonodromic deformation of some irreducible tracefree rank 2 connection with  $n$  (resp.  $m$ ) poles counted with (resp. without) multiplicity, on a compact Riemann surface of genus  $g$ . We will assume

$$\dim(T) = 3g - 3 + n$$

and  $3g - 3 + n > 0$ . In particular we exclude the special cases  $(g, n) = (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3)$  and  $(1, 0)$ , that will be treated in section A.6.2. Moreover, in the cases  $(g, m) = (0, 1), (0, 2), (0, 3)$  we use the universal isomonodromic deformation with normalized parameter space, as in section A.3.3.

We are now going to prove the main theorem. Let  $k$  be an integer. We denote by  $T_k$  the following subset of the parameter space :

$$T_k = \{t \in T \mid \exists \text{ section } \sigma_t \text{ of } P_t \text{ such that } \sigma_t \cdot \sigma_t \leq k\}.$$

We are going to prove that

$$\text{codim}(T_k) \geq g - 1 - k.$$

Recall that we have

$$T_g = T$$

according to a result of M. Nagata. It follows from  $\text{codim}(T_{g-2}) \geq 1$  that if  $t$  is generic, then  $P_t$  has minimal self-intersection number  $g$  or  $g - 1$ , according to the parity of  $g$ .

### A.5.1 Filtration of the parameter space

**Lemma A.44 (Semi-continuity)** *For each integer  $k$ , the set  $T_k$  is a closed analytic subset of  $T$ . In particular, we have an increasing filtration by closed analytic sets*

$$\dots \subset T_{g-3} \subset T_{g-2} \subset T_{g-1} \subset T_g = T.$$

**Outline of the proof :** It is sufficient to consider the *germified* parameter space  $(T, t_0)$  for some initial parameter  $t_0$ . According to a theorem of M. Hakim [Hak72], the analytic family  $(E_t)_{t \in T}$  of holomorphic vector bundles is analytically equivalent to an analytic family  $(E_t^{\text{alg}})_{t \in T}$  of algebraic vector bundles. In particular, the vector bundle  $\mathcal{E}$  is generated by a finite number of global meromorphic sections. Up to small perturbations, each such section defines a holomorphic section of the projective bundle  $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ . We may choose three such sections  $\sigma_0, \sigma_1$  and  $\sigma_\infty$ . Again by small perturbations we make sure that these sections are in general position :

$$\begin{cases} \sigma_0, \sigma_1, \sigma_\infty \text{ are pairwise transverse} \\ \sigma_0 \cap \sigma_1 \cap \sigma_\infty = \emptyset \end{cases}$$

After applying elementary transformations centered in each of the intersections  $p_1, \dots, p_N$ , we get the trivial  $\mathbf{P}^1$ -bundle over  $\mathcal{X}$ . Note that the position of the centers  $q_1, \dots, q_N$  for the inverse elementary transformations on  $\mathcal{X} \times \mathbf{P}^1$  is depending holomorphically on the parameter  $t \in T$ , see figure 3.10. For some fixed parameter  $t_1$ , let  $\sigma_{t_1}$  be a section of  $\mathcal{P}_{t_1}$  and let  $\tilde{\sigma}_{t_1}$  the section of  $\mathcal{X} \times \mathbf{P}^1|_{t=t_1}$  resulting from the elementary transformations. Let  $d$  be the degree of the section  $\tilde{\sigma}_{t_1}$  on the trivial bundle. Then the self-intersection number of  $\sigma_{t_1}$  is

$$\sigma_{t_1} \cdot \sigma_{t_1} = 2d + N - 2\eta, \tag{A.20}$$

where  $\eta$  is the number of points lying on  $\tilde{\sigma}_{t_1}$  within  $q_1(t_1), \dots, q_N(t_1)$ . Thus there is a section of self-intersection number less or equal to  $k$  of the bundle  $\mathcal{P}_{t_1}$  if, and only if, there is a pair  $(d, \eta)$  satisfying

$$k \geq 2d + N - \eta$$

and a selection of  $\eta$  points within  $q_1(t_1), \dots, q_N(t_1)$  such that there is an irreducible bidegree  $(1, d)$ -curve (the graph of a degree  $d$  rational function) passing by these points. Thus the existence of a section with self-intersection number less or equal to  $k$  is an algebraic condition on the position of the points  $q_1(t_1), \dots, q_N(t_1)$ . In varying the parameter, we see that the set  $T_k$  is the pull-back of an algebraic set by an analytic mapping. This means  $T_k$  is a closed analytic subset of  $T$ .  $\square$

**Lemma A.45** *Let  $k$  be an integer and suppose let  $t_k$  be a generic parameter in  $T_k \setminus T_{k-1}$ . Then in restriction to the germified parameter space  $(T_k, t_k)$ , there is a holomorphic section  $\Sigma$  of  $\mathcal{P}$  inducing for each parameter  $t$  in the germ  $(T_k, t_k)$  a holomorphic section  $\sigma_t = \Sigma|_t$  of  $P_t$  satisfying*

$$\sigma_t \cdot \sigma_t = k.$$

*In particular,  $\Sigma$  is isomorphic to the germ of the universal curve  $\mathcal{X}$  over  $(T_k, t_k)$ .*

**Outline of the proof :** As in the proof of the previous lemma we can see the germ  $T_k$  as a finite union over possible configurations of closed analytic subsets parametrizing families of generically holomorphic sections. Choose one such subset which is equal to the germ  $T_k$ . At a generic parameter  $t_k$  in  $T_k \setminus T_{k-1}$ , we can suppose that the induced section is holomorphic.  $\square$

### A.5.2 A formula of M. Brunella

Let  $k$  be an integer and  $t_k \in T_k \setminus T_{k-1}$ . Let  $p$  be a point of  $\sigma_{t_k}$ . In a neighborhood of  $p$ , the foliation  $\mathcal{F}_{t_k}$  is given by a meromorphic 1-form

$$\omega_{t_k} : dy + \left( \frac{1}{x^l} a(x)y^2 + \frac{1}{x^l} b(x)y + \frac{1}{x^l} c(x) \right) dx,$$

where  $l \geq 0$  is the order of the pole of  $\mathcal{F}_{t_k}$  at  $\{x = 0\}$ , and the section  $\sigma_{t_k}$  is given by a reduced local equation  $\{f = 0\}$ . Alternatively, the foliation  $\mathcal{F}_{t_k}$  can be defined in our coordinates by the holomorphic vector field

$$\mathcal{V} : x^l \frac{\partial}{\partial x} - (a(x)y^2 + b(x)y + c(x)) \frac{\partial}{\partial y}.$$

As in [Bru04], page 22, the *multiplicity of tangency* between  $\mathcal{F}_{t_k}$  and  $\sigma_{t_k}$  at  $p$  then is given by

$$\text{tang}_p(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k}) = \frac{\mathcal{O}_p}{\langle f, \mathcal{V}(f) \rangle},$$

where  $\mathcal{O}_p$  is the local algebra of  $P_{t_k}$  at  $p$  and  $\langle f, \mathcal{V}(f) \rangle$  is the ideal generated by  $f$  and its Lie-derivative  $\mathcal{V}(f)$  along  $\mathcal{V}$ . Now the fact that the initial connection is irreducible implies that no section of the projective bundle, and in particular not  $\sigma_{t_k}$ , can be invariant for the associated Riccati foliation. This means that  $\mathcal{V}(f)$  is not identically zero.

**Example A.46** For example, let us choose local coordinates  $(x, y)$  of  $P_{t_k}$ , such that the section  $\sigma_{t_k}$  is given by  $\{y = \infty\}$ . Then for  $p = (0, \infty)$ , we get

$$\#\text{tang}_{(0, \infty)}(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k}) = \text{ord}_0(a(x)).$$

The fact that  $\sigma_{t_k}$  is not invariant by  $\mathcal{F}_{t_k}$  then means that  $a(x)$  is not identically zero.

In [Bru04], page 23, M. Brunella stated that the total number of tangencies on  $\sigma_{t_k}$  is related to the self-intersection number of  $\sigma_{t_k}$  in the following way :

$$\#\text{tang}(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k}) = \sigma_{t_k} \cdot \sigma_{t_k} - T_{\mathcal{F}_{t_k}} \cdot \sigma_{t_k}, \quad (\text{A.21})$$

where  $T_{\mathcal{F}_{t_k}}$  is the tangent bundle of  $\mathcal{F}_{t_k}$ . Let us recall Brunella's proof.

**Proof:** There is a covering by local trivialization charts  $(U_i \times \mathbf{P}^1)$  of  $P_{t_k}$  such that  $\mathcal{F}_{t_k}$  and  $\sigma_{t_k}$  are given on  $U_i \times \mathbf{P}^1$  respectively by a holomorphic vector field  $\mathcal{V}_i$  and a reduced holomorphic equation  $\{f_i = 0\}$ . They are gluing together by means of holomorphic transition maps  $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$  respectively  $f_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ . We have

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i &= g_{ij} \mathcal{V}_j \\ f_i &= f_{ij} f_j. \end{aligned}$$

Here the cocycle  $(g_{ij})$  is defining the cotangent bundle  $T_{\mathcal{F}_{t_k}}^*$ , which is the dual of the tangent bundle  $T_{\mathcal{F}_{t_k}}$  by definition. By Leibniz's rule, on  $(\mathcal{O}(U_i \cap U_j)) \times \mathbf{P}^1$  we have

$$\mathcal{V}_i(f_i) = g_{ij}(f_{ij} \mathcal{V}_j(f_j) + f_j \mathcal{V}_j(f_{ij})).$$

Since  $f_j = 0$  on  $\sigma_{t_k}$ , this implies that  $(\mathcal{V}_i(f_i))|_{\sigma_{t_k}}$  is defining a global holomorphic section of the bundle

$$[T_{\mathcal{F}_{t_k}}^* \otimes \mathcal{O}_{P_{t_k}}(\sigma_{t_k})]|_{\sigma_{t_k}}.$$

The zeroes of this section (counted with multiplicity) are exactly the tangencies between  $\mathcal{F}_{t_k}$  and  $\sigma_{t_k}$ . Thus

$$\begin{aligned} \#\text{tang}(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k}) &= \deg([T_{\mathcal{F}_{t_k}}^* \otimes \mathcal{O}_{P_{t_k}}(\sigma_{t_k})]|_{\sigma_{t_k}}) \\ &= \deg(T_{\mathcal{F}_{t_k}}^*|_{\sigma_{t_k}}) + \deg(\mathcal{O}_{P_{t_k}}(\sigma_{t_k})|_{\sigma_{t_k}}) \\ &= T_{\mathcal{F}_{t_k}}^* \cdot \sigma_{t_k} + \sigma_{t_k} \cdot \sigma_{t_k} \\ &= \sigma_{t_k} \cdot \sigma_{t_k} - T_{\mathcal{F}_{t_k}} \cdot \sigma_{t_k}. \end{aligned}$$

□

**Lemma A.47** *Since  $\mathcal{F}_{t_k}$  is a Riccati foliation, formula (A.21) implies*

$$\#\text{tang}(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k}) = \sigma_{t_k} \cdot \sigma_{t_k} + 2g - 2 + n, \quad (\text{A.22})$$

where  $g$  is the genus of the Riemann surface  $X_{t_k}$  and  $n$  is the number of vertical leaves of  $\mathcal{F}_{t_k}$ , counted with multiplicity.

**Proof:** Let  $x_1, \dots, x_m$  on  $X_{t_k}$  be the poles of  $\mathcal{F}_{t_k}$  with multiplicity  $n_1, \dots, n_m$  respectively. Denote by  $\pi : P_{t_k} \rightarrow X_{t_k}$  the projection of the  $\mathbf{P}^1$ -bundle to the base curve. Let  $v_0$  be a meromorphic vector field on  $X_{t_k}$ , i.e. a meromorphic section of the sheaf of holomorphic vector fields on  $X_{t_k}$ . Its divisor  $K^* = (v_0)_0 - (v_0)_\infty$  thus is dual to the canonical divisor  $K$ , and we have

$$\deg(K^*) = 2 - 2g.$$

We know that  $v_0$  lifts in a unique way to a vector field  $\mathcal{V}_0$  tangent to the foliation with divisor

$$\pi^* K^* - \sum_{i=1}^m n_i [\pi^* x_i],$$

which is topologically equivalent to  $-(2g - 2 + n)f$ , where  $f$  is a generic fibre of  $P_{t_k}$ . Since  $\sigma_{t_k}$  is a section, we thus have  $T_{\mathcal{F}_{t_k}} \cdot \sigma_{t_k} = -(2g - 2 + n)$   $\square$

In particular, we have

$$\#\text{tang}(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k}) = k + 2g - 2 + n. \quad (\text{A.23})$$

Note that these tangencies occur either in a non-singular point of the foliation by a contact with the section or in a singular point of the foliation lying on the section. Otherwise there is transversality.

### A.5.3 Trivial deformations for small self-intersection numbers

In order to prove theorem A.1, it is sufficient to consider integers  $k$  such that

$$T_k \setminus T_{k-1} \neq \emptyset,$$

i.e.  $T_k$  is a stratum in lemma A.44 such that  $k$  is the generic minimal self-intersection number among the ruled surfaces  $P_t$  with parameter  $t \in T_k$ . Let  $t_k$  be a generic parameter in  $T_k$ . From now on we consider the projectivized universal isomonodromic deformation in restriction to the germified parameter space

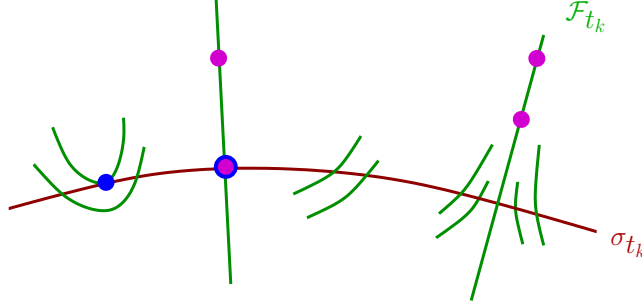


FIG. A.6 – Different possibilities of tangency respectively transversality

$(T_k, t_k)$ . In order to simplify notations, we will denote the resulting isomonodromic deformation by  $(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{F})$  as well. Since  $t_k$  is generic, we will suppose that the minimal self-intersection number as well as the number of tangencies is constant along the isomonodromic deformation  $(P_t \rightarrow X_t, \mathcal{F}_t)_{t \in T_k}$ . Let  $\Sigma$  be a holomorphic section of  $\mathcal{P}$  over  $\mathcal{X} \rightarrow (T_k, t_k)$  inducing for each parameter  $t \in (T_k, t_k)$  a holomorphic section of  $P_t$  with self-intersection number  $k$ , as in lemma A.45. We need to show  $\dim(T_k) \leq k + 2g - 2 + n$ . Since  $\#\text{tang}(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k}) = k + 2g - 2 + n$ , we actually want to show

$$\dim(T_k) \leq \#\text{tang}(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k}). \quad (\text{A.24})$$

We will see that if there are no tangencies, then the projectivized universal isomonodromic deformation  $(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{F})$  is trivial in restriction to  $(T_k, t_k)$ . In the general case, we will show that the projectivized universal isomonodromic deformation is trivial in restriction to a submanifold  $T' \subset T_k$  of dimension

$$\dim(T') \geq \dim(T_k) - \#\text{tang}(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k}). \quad (\text{A.25})$$

**Lemma A.48** *If  $(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{F})|_{T'}$  with parameter space  $(T', t')$  is trivial, then  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)|_{T'}$  is trivial, too. In particular, this implies  $\dim(T') = 0$  according to the universal property theorem.*

**Proof:** The foliation  $(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{F})|_{(T', t')}$  is trivial, *i.e.* isomorphic to the constant foliation  $(P_{t'} \rightarrow X_{t'}, \mathcal{F}_{t'}) \times T'$  by gauge-coordinate transformation, if, and only if, there is a vector field  $v$  on  $\mathcal{X}|_{T'}$  transverse to the parameter, that lifts to a vector field  $V$  on  $\mathcal{P}|_{T_k}$  tangent to the foliation  $\mathcal{F}|_{T_k}$ . In each non-singular point however, the vector field  $v$  lifts on  $\mathcal{E}|_{T'}$  to a vector field  $\tilde{V}$  tangent to the flat connection



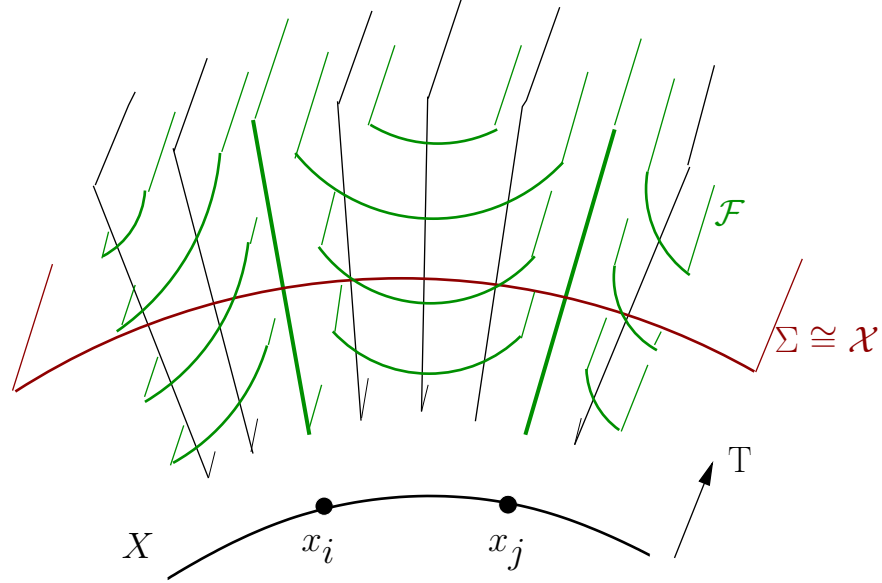


FIG. A.7 – Deformation of a Riccati foliation and global section

$\nabla|_{T'}$ . The vector field  $\tilde{V}$  can be continued analytically at the polar set. Indeed, in a neighborhood of a pole, choose coordinates  $(t, x, y)$  on  $\mathcal{P}|_{T'}$ , such that the vector fields  $v$  and  $V$  are given by  $\frac{\partial}{\partial t}$ . In these coordinates,  $\mathcal{F}|_{T'}$  does not depend on the parameter  $t$  :

$$\mathcal{F}|_{T'} : x^l dy = (\alpha(x)y^2 + \beta(x)y + \gamma(x))dx. \quad (\text{A.26})$$

Since  $(\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{X}, \nabla)|_{(T', t')}$  is a tracefree connection, its connection matrix in the coordinates  $(t, x, Y)$  is uniquely determined by (A.26) :

$$\nabla|_{T'} : x^l dY = \begin{pmatrix} -\frac{\beta(x)}{2} & -\alpha(x) \\ \gamma(x) & \frac{\beta(x)}{2} \end{pmatrix} Y dx.$$

The vector field  $v$  on the base curve thus lifts to the vector field  $\tilde{V} = \frac{\partial}{\partial t}$  tangent to the connection.  $\square$

If the projectivised universal isomonodromic deformation is trivial in restriction to  $T'$ , then we have  $\dim(T') = 0$ , and (A.24) follows.

### A.5.3.1 Proof in the logarithmic or non-singular case : triviality of the curve deformation

In the (non-singular or) logarithmic case, each isomonodromic deformation fixing the curve and the poles is trivial according to the Riemann-Hilbert correspondence. In this case it is sufficient to find a submanifold  $T'$  of  $T_k$  of dimension (A.25), such that

$$(\mathcal{X}|_{T'}, \mathcal{D}|_{T'}) \cong (T' \times X_{t_k}, T' \times D_{t_k}). \quad (\text{A.27})$$

#### a) Case of transversality

Since the number of tangencies given by  $k + 2g - 2 + n$  is a positive integer, we already know that

$$k \geq 2 - 2g - n.$$

As an example, let us now consider the case  $k = 2 - 2g - n$ . By (A.23), the foliation  $\mathcal{F}_{t_k}$  associated to the generic initial parameter  $t_k$  is transverse to the section  $\sigma_{t_k}$  in this case. Furthermore, the foliation  $\mathcal{F}$  is transverse to the parameter  $\{t = t_k\}$  by local constancy. Hence the induced foliation  $\mathcal{F}|_{\Sigma}$  is a non-singular foliation of codimension 1, which is also transverse to the parameter  $\{t = t_k\}$ . We may conclude that the induced foliation trivializes

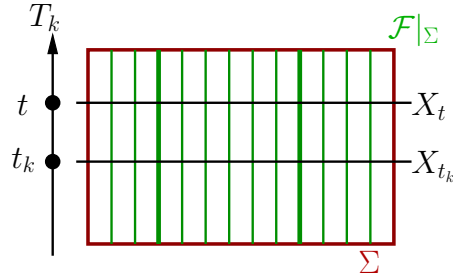


FIG. A.8 – Case of transversality : the induced foliation trivializes the fibration by curves

the fibration by curves  $(X_t)_{t \in T_k}$  over the germ  $T_k$ . More precisely, we may choose local coordinates such that  $\mathcal{F}$  and  $\Sigma$  are given respectively by

$$\mathcal{F} : dy + \alpha(t, x)y^2 + \beta(t, x)y + \gamma(t, x), \quad \Sigma : \{y = \infty\}.$$

Then the induced foliation  $\mathcal{F}|_{\Sigma}$  is given by

$$-\alpha(t, x).$$

Write  $-\alpha$  in the form

$$-\alpha = \frac{1}{x^l}(u(t, x)dx + v(t, x)dt),$$

where  $l \geq 0$  is the order of the pole of  $\mathcal{F}$  in these coordinates. Since  $\mathcal{F}_{t_k}$  is transversal to  $\sigma_{t_k}$ , we have  $u(t_k, 0) \neq 0$ . If  $l = 0$ , this implies that there is a coordinate change  $(t, x) \mapsto (t, \varphi(t, x))$  such that  $-\alpha$  has the form  $\tilde{u}(t, x)dx$  with  $\tilde{u}(t_k, 0) \neq 0$ . In a small neighborhood of  $(t_k, 0)$ , the foliation  $\mathcal{F}|_\Sigma$  then is given by

$$\mathcal{F}|_\Sigma : dx.$$

If  $l > 0$ , then the transversality condition on  $\mathcal{F}$  implies that  $v$  is of the form  $v(t, x) = xw(t, x)$ . This implies there is a coordinate change  $(t, x) \mapsto (t, \varphi(t, x))$  fixing  $\{x = 0\}$  such that  $-\alpha$  has the form  $\frac{1}{x^l}\tilde{u}(t, x)dx$  with  $\tilde{u}(t_k, 0) \neq 0$ . In a small neighborhood of  $(t_k, 0)$ , the foliation  $\mathcal{F}|_\Sigma$  then is given by

$$\mathcal{F}|_\Sigma : \frac{1}{x^l}dx.$$

Up to appropriate coordinate transformations, the reduced version of the foliation  $\mathcal{F}|_\Sigma$  thus is given in each chart with coordinates  $(t, x)$  by  $dx = 0$ . The base curve  $\mathcal{X}$  then is trivial in these coordinates, *i.e.* it is given by locally trivial charts  $T_k \times U$  with coordinates  $(t, x)$  such that the transition maps do not depend on the parameter. Otherwise a  $dt$ -component would appear for  $\mathcal{F}|_\Sigma$ . Moreover, since the position of the poles on  $\Sigma$  is indicated by special leaves of  $\mathcal{F}|_\Sigma$ , the polar divisor does not depend on the parameter either. We thus have trivialized simultaneously the curve and the polar divisor. On the non-singular or logarithmic case (*i.e.* if the order  $l$  of each pole is 0 or 1), the universal isomonodromic deformation restricted to the parameter space  $T_k$  then is trivial. We thus have (A.27) as desired, with  $T' = T_k$ .

**b) Case of tangency**

Let us now consider the general logarithmic case. We are going to construct a submanifold  $T' \subset T_k$  of dimension (A.25) such that the foliation  $(\mathcal{F}|_\Sigma)|_{T'}$  is transverse to the parameter  $t \in T'$ . This will trivialize the fibration by punctured curves along  $T'$  and provide (A.27), as desired.

Since the foliation  $\mathcal{F}$  is already transverse to the parameter, each tangency between  $\mathcal{F}|_\Sigma$  and the parameter  $\{t = t_k\}$  is induced by a tangency between  $\mathcal{F}$  and  $\Sigma$ .

Let us consider a local chart  $T_k \times U \times \mathbf{P}^1$  of  $\mathcal{P}$  containing such a tangency. For appropriate coordinates  $(t, x, y)$  we may suppose that  $\Sigma$  is given by

$\{y = \infty\}$  in this chart and the tangency between  $\mathcal{F}$  and  $\Sigma$  is located in  $\{x = 0\}$ . Let  $\tilde{\omega}$  be a holomorphic 1-form defining  $\mathcal{F}$ . We have

$$\tilde{\omega} = x^l dy + y^2 \tilde{\alpha}(t, x) + y \tilde{\beta}(t, x) + \tilde{\gamma}(t, x), \quad (\text{A.28})$$

where  $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$  et  $\tilde{\gamma}$  are holomorphic 1-forms and  $l \in \{0, 1\}$ . If  $\nu$  is the multiplicity of the tangency between  $\mathcal{F}|_{t=t_k}$  and  $\sigma_{t_k}$  for a generic parameter  $t_k$ , then the foliation  $\mathcal{F}|_{\Sigma}$  given by  $-\tilde{\alpha}$  is of the form

$$-\tilde{\alpha} = x^{\nu} u(t, x) dx + \sum_{i=0}^{\nu} x^i \omega_i(t) + x^{\nu+1} \omega_{\nu+1}(t, x),$$

with  $u|_{\{x=0\}} \neq 0$ , where  $u$  is a holomorphic function and  $\omega_i$  are holomorphic 1-forms.

- If  $\omega_0 \equiv \dots \equiv \omega_{\nu} \equiv 0$ , we get  $-\tilde{\alpha} = x^{\nu} u(t, x) dx + x^{\nu+1} \omega_{\nu+1}(t, x)$  and we may consider the reduced 1-form  $-\tilde{\alpha} = u(t, x) dx + x \omega_{\nu+1}(t, x)$  which defines a non-singular foliation on  $\Sigma$  of codimension 1 generically transverse to the parameter  $\{t = t_k\}$  as in a).

Geometrically, this means that the tangency between  $\mathcal{F}_t$  and  $\sigma_t$  remains in the same leaf when  $t$  varies in  $T_k$ . Then the foliation on  $\Sigma$  induced by  $\mathcal{F}$  has one multiple leaf, but the reduced foliation is non-singular and transverse to the parameter  $\{t = t_k\}$ .

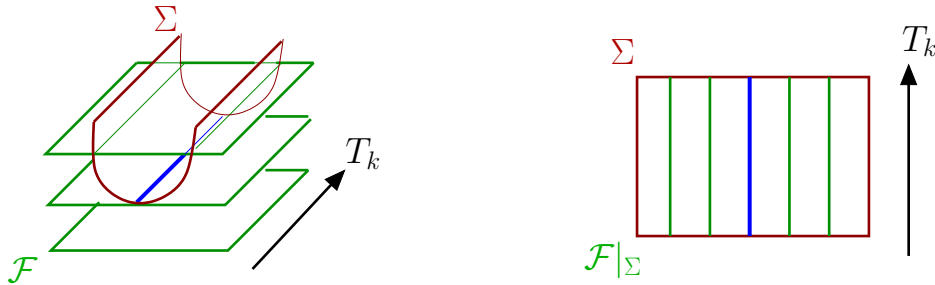


FIG. A.9 – Tangency remains in the leaf : resort to the transversal case

**Remark A.49** *Note that in this case, we do not need to restrict the parameter space.*

- Now consider the case when the tangency does not remain in the same leaf. Then the foliation induced on  $\Sigma$  will not be transverse to the parameter. Using the fact that the leaves of  $\mathcal{F}$  have codimension 1, we will find a submanifold  $T'$  of codimension 1 of  $T_k$  such that the tangency in

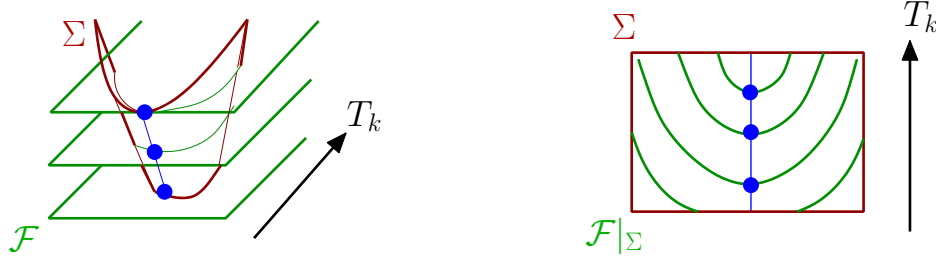


FIG. A.10 – Tangency changes the leaf : we can not conclude

consideration between  $\mathcal{F}_t$  and  $\sigma_t$  remains in the same leaf when  $t$  varies in  $T'$ .

Let us calculate the integrability condition  $0 = \tilde{\alpha} \wedge d\tilde{\alpha}$  for the foliation  $\mathcal{F}|_\Sigma$  explicitly :

$$0 = \sum_{i=0}^{\nu-1} x^i \left[ \sum_{j=0}^i \omega_{i-j} \wedge d\omega_j - \left( \sum_{j=0}^i (j+1) \omega_{i-j} \wedge \omega_{j+1} \right) \wedge dx \right] + x^\nu [\dots] \quad (\text{A.29})$$

Since  $\omega_i$  does not depend on  $x$  for  $i \in \{0, \dots, \nu\}$ , we get

$$0 = \sum_{j=0}^i (j+1) \omega_{i-j} \wedge \omega_{j+1}$$

for each  $i \in \{0, \dots, \nu-1\}$ . For  $i = 0$  we obtain  $\omega_0 \wedge \omega_1 = 0$  and by induction we conclude that all 1-forms  $\omega_i$  for  $i \in \{0, \dots, \nu\}$  are dependent. Note that the integrability condition (A.29) implies also  $\omega_0 \wedge d\omega_0 = 0$ . We may suppose that  $\omega_0 \neq 0$ , otherwise we consider the reduced version of  $-\tilde{\alpha}$ . Let  $T'$  be one leaf of the possibly singular foliation on  $T_k$  defined by  $\omega_0 = 0$ . Then all the  $\omega_i$  for  $i \in \{0, \dots, \nu\}$  are zero on  $T'$ . Since  $t_k$  is generic, we may suppose that  $T'$  is a smooth subvariety of codimension 1 of the germ  $T_k$ .

We proceed in the same way successively with every tangency and we finally get a subspace  $T'$  of  $T_k$  of codimension less or equal to the number of tangencies counted *without multiplicity*. In particular, we have (A.25). According to our construction of  $T'$ , the foliation  $(\mathcal{F}_t)_{t \in T'}$  on  $(P_t)_{t \in T'}$  induces a foliation on  $(\sigma_t)_{t \in T'}$  which is transverse to the parameter  $\{t = t_k\}$  and which has only apparent singularities being actually multiple leaves. We may conclude as in the case of transversality and obtain (A.27).

**Remark A.50** *We remark that in the logarithmic case, all the tangencies between  $\mathcal{F}_t$  and  $\sigma_t$  for a generic parameter  $t \in T_k$  have to be simple and cannot remain in the same leaf.*

### A.5.3.2 Proof in the case of multiple poles : triviality of the deformation

In the case of multiple poles we will have not only to trivialize the deformation of the curve and the position of the poles but also the deformation of the foliation.

#### a) Tangencies in non-singular points of the foliation

First consider the case when none of the tangencies  $\text{tang}(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k})$  occurs in a singularity of the foliation  $\mathcal{F}_{t_k}$  which is lying on the section  $\sigma_{t_k}$ . We may suppose that this is the case for every parameter  $t$  in the germified parameter space  $(T_k, t_k)$ . We can use the method applied in the logarithmic case to trivialize the foliation  $\mathcal{F}|_\Sigma$  and thereby the punctured curve  $\mathcal{X}$  in restricting the parameter space  $T_k$  to a submanifold  $T'$  of dimension (A.25). As before, we choose a new atlas with local charts  $T' \times U \times \mathbf{P}^1$  and coordinates  $(t, x, y)$  such that in each chart, the induced foliation  $\mathcal{F}|_\Sigma$  is given by  $dx = 0$ . Now we want to trivialize locally the foliation  $\mathcal{F}|_{T'}$  by gauge transformations. In particular, we will not allow any non-trivial coordinate transformations in  $(t, x)$  any more.

- If  $U$  is a neighborhood of a non-singular point, then there is a holomorphic gauge transformation such that  $\mathcal{F}$  is given by the form  $dy = 0$  on the local chart. After this gauge transformation, the section  $\Sigma$  will be given by  $\{y = f(t, x)\}$ , where  $f$  is a meromorphic function. Yet the induced foliation on  $\Sigma$  will not depend on  $t$ . Hence  $f$  does not depend on  $t$ .

$$\mathcal{F} : dy = 0, \quad \Sigma : \{y = f(x)\}, \quad \mathcal{F}|_\Sigma : x' dx = 0$$

- Let  $U$  be a chart on  $\mathcal{X}$  such that there are no tangencies between  $\mathcal{F}$  and  $\Sigma$  above  $U$ . Let  $\mathcal{F}$  be defined by a meromorphic 1-form

$$\omega = dy + y^2\alpha(t, x) + y\beta(t, x) + \gamma(t, x) \quad (\text{A.30})$$

with a pole of order  $l \geq 1$  at  $\{x = 0\}$ . Let  $\tilde{\alpha} = \alpha x^l$ . We have  $\mathcal{F}|_\Sigma : dx = 0$  and since there is no tangency,  $\tilde{\alpha} = a(t, x)dx$ , respectively

$$\alpha = \frac{a(t, x)}{x^l} dx,$$

where  $a(0, t) \neq 0$ . Since  $t_k$  is generic, we can find a gauge transformation fixing infinity such that  $\mathcal{F}$  is given by a normal form

$$\mathcal{F} : dy + \frac{y^2}{x^l} dx + \frac{c(x)}{x^l} dx, \quad \Sigma : \{y = \infty\}, \quad \mathcal{F}|_{\Sigma} : dx = 0,$$

as in the proof of lemma A.15.

We have thus locally trivialized  $\mathcal{F}$  and  $\mathcal{F}|_{\Sigma}$  simultaneously over  $(T', t_k)$ . Consider now a transition map between such charts, given by a gauge-coordinate transformation

$$(t, x, y) \mapsto (t, \varphi(t, x), \phi(t, x) \cdot y).$$

Since  $\Sigma$  and  $\mathcal{F}|_{\Sigma}$  do not depend on the parameter  $t$  in our charts, neither does the underlying coordinate transformation :

$$\varphi = \varphi(x).$$

Moreover, since  $\mathcal{F}$  does not depend on the parameter  $t$  in each local chart, neither does the underlying gauge transformation. Otherwise a non-trivial  $dt$ -component would appear in the local 1-form defining  $\mathcal{F}$ . We have

$$\phi = \phi(x).$$

**b) Example for the limits of this method in the case of tangencies in singular points**

We can try to apply the previous method to a general universal isomonodromic deformation : First we trivialize the deformation of the curve and afterwards we trivialize the foliation  $\mathcal{F}$  over the set of non-singular points or points of transversality by means of gauge-transformations. In the case of simple poles, this trivialization can be naturally continued to the poles with tangency, since there are gauge transformations conjugating  $\mathcal{F}$  to one of the standard forms not depending on the parameter. In the case of multiple poles this is not true. In order to trivialize the foliation, we would a priori need to reduce the remaining set of parameters to a submanifold of codimension  $l - 1$  for each pole of multiplicity  $l$  in which a tangency occurs. Let us consider an example illustrating this situation in a germified neighborhood of a double pole.

**Example A.51** Consider the foliation on  $\mathbf{C} \times \mathbf{P}^1$  given by

$$dy - y\theta \frac{dx}{x},$$

where  $\theta$  is a non-zero complex number. We construct an isomonodromic deformation by an elementary transformation in  $(0, t)$  with parameter  $t \in T$  where  $(T, t_0) = (\mathbf{C}, \epsilon)$  such that the section  $\Sigma = \{y = 1\}$  is sent to infinity :

$$\hat{y} = \frac{1}{x} \frac{y - t}{y - 1}$$

For each parameter  $t$  we obtain a Riccati foliation with singularities of second order. We normalize such that the coefficient of  $\tilde{y}^2$  is 1 :

$$\tilde{y} = \frac{\theta}{1 - t} \hat{y}.$$

We get the following global foliation on  $\mathbf{C} \times T \times \mathbf{P}^1$  :

$$d\tilde{y} + \tilde{y}^2 dx + \tilde{y} \left( 1 - \frac{\theta(1+t)}{(1-t)} \right) \frac{1}{x} dx + \frac{\theta}{(1-t)^2} \left( \frac{\theta t}{x^2} dx - \frac{1}{x} dt \right).$$

The restriction of this isomonodromic deformation to the section  $\{\tilde{y} = \infty\}$  is given by

$$x^2 dx = 0,$$

which does not depend on the parameter  $t$ .

After any holomorphic gauge-coordinate-transformation of type  $(t, \varphi(x), \phi(t, x) \cdot \tilde{y})$ , the 1-form defining  $\mathcal{F}$  will still have a non-trivial  $dt$ -part, since the  $dt$ -part has a pole which cannot disappear.

This example shows that if we trivialize first the base curve of the universal isomonodromic deformation  $\mathcal{F}$  in restriction to  $T'$ , then it might later be impossible to trivialize the foliation if we want to keep the base curve trivial, unless we use some further restriction of the parameter space. But since we want the parameter space  $T'$  to satisfy (A.25), we have to refine our argumentation.

### c) Tangencies in singular points of the foliation

Consider now a neighborhood of a tangency persisting in a singularity of the foliation. Consider a chart  $T_k \times U \times \mathbf{P}^1$  containing such a singularity, with coordinates  $(t, x, y)$ , such that  $\mathcal{F}$  is constant in  $t$ . In particular, the position



of the singularities and thus the position of the tangency shall not depend on  $t$  in these coordinates. Up to a gauge-coordinate-transformation constant in  $t$  we may suppose the tangency locus to be given by  $\{x = 0, y = 0\}$ . Then  $\mathcal{F}$  and  $\Sigma$  are of the form

$$\mathcal{F} : dy + \frac{\alpha(x)}{x^l}y^2 + \frac{\beta(x)}{x^l}y + x\frac{\gamma(x)}{x^l}, \quad \Sigma : \{y = xf(x, t)\}, \quad (\text{A.31})$$

where  $\alpha, \beta, \gamma$  are holomorphic 1-forms,  $l \geq 1$  and  $f$  is a holomorphic function. If we now apply an elementary transformation with center  $\{x = 0, y = 0\}$ , the resulting foliation will still be constant with respect to  $t$ . In fact the parameter does not interfere at all. The elementary transformation  $\hat{y} = \frac{y}{x}$  provides a new foliation  $\hat{\mathcal{F}}$  and a new section  $\hat{\Sigma}$  :

$$\hat{\mathcal{F}} : d\hat{y} + \frac{\alpha(x)}{x^{l-1}}\hat{y}^2 + \left(\frac{\beta(x)}{x^l} + \frac{1}{x}dx\right)\hat{y} + \frac{\gamma(x)}{x^l}, \quad \hat{\Sigma} : \{\hat{y} = f(x, t)\}$$

and  $s : \{x = 0, \hat{y} = \infty\}$  is the center of the inverse elementary transformation. Note that the reduced induced foliation on  $\hat{\mathcal{F}}|_{\hat{\Sigma}}$  did not change with respect to  $\mathcal{F}|_{\Sigma}$ .

**Lemma A.52** *The number of tangencies between  $\hat{\mathcal{F}}$  and  $\hat{\Sigma}$  is strictly smaller than the number of tangencies between  $\mathcal{F}$  and  $\Sigma$ . The order of the pole at  $\{x = 0\}$  will either stay the same or decrease as well.*

**Proof:** To prove this result, it is more convenient to consider other coordinates  $(t, x, y)$ , where  $\Sigma$  is given by  $\{y = 0\}$  and the tangency is still given by  $\{x = 0, y = 0\}$ . Let  $\nu$  be the order of the tangency and let  $l$  be the order of the pole in  $\{x = 0\}$ . Recall that we are supposing  $\nu, l > 0$ . Since the foliation  $\mathcal{F}$  is locally trivial up to gauge-coordinate-transformations, the defining 1-form  $\omega$  satisfies  $(d\omega)_{\infty} \leq (\omega)_{\infty}$ . The holomorphic 1-form  $\tilde{\omega} = x^l\omega$  then is of the form

$$\tilde{\omega} : x^l dy + y^2(a_0 dx + xa_1 dt) + y(b_0 dx + xb_1 dt) + x^{\nu}c_0 dx + xc_1 dt,$$

where  $a_0, a_1, \dots, c_1$  are holomorphic functions in  $(t, x)$  and  $c_0(0, t) \neq 0$ . In these coordinates, the elementary transformation centered in  $(0, 0)$  is given by  $\hat{y} = \frac{y}{x}$ . By this transformation we get

$$\hat{\tilde{\omega}} : x^l d\hat{y} + x\hat{y}^2(a_0 dx + xa_1 dt) + \hat{y}((b_0 + x^{l-1})dx + xb_1 dt) + (x^{\nu-1}c_0 dx + c_1 dt)$$

and a new section  $\widehat{\Sigma} : \{\widehat{y} = 0\}$  corresponding to  $\Sigma$ . If the 1-form  $\widehat{\omega}$  is reduced, then  $\widehat{\mathcal{F}}$  has a pole of order  $l \geq 1$  at  $\{x = 0\}$  and the order of tangency with the section  $\{\widehat{y} = \infty\}$  is  $\nu - 1$ . Otherwise the order of the pole will decrease and the order of tangency, too.  $\square$

We can iterate this procedure for every tangency located at a singularity until the foliation becomes either transverse to the section, or non-singular in restriction to the section. Denote successively by  $\text{elm}_1, \dots, \text{elm}_\eta$  the necessary elementary transformations. Let us denote by  $\widehat{\mathcal{F}}$  the foliation and by  $\widehat{\Sigma}$  the section obtained after these  $\eta$  elementary transformations. Note that for every parameter  $t \in T_k$ , we have

$$\#\text{tang}(\widehat{\mathcal{F}}_t, \widehat{\sigma}_t) \leq \#\text{tang}(\mathcal{F}_t, \sigma_t) - \eta.$$

Now we may apply the argumentation of paragraph a) to  $(\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\Sigma})$ . We thus can trivialize the curve  $\mathcal{X}$  and the position of the poles as well as the foliation  $\widehat{\mathcal{F}}$  by restricting the parameter space  $T_k$  to a subspace  $\widehat{T}'$  of codimension  $\#\text{tang}(\widehat{\mathcal{F}}_{t_k}, \widehat{\sigma}_{t_k})$ . In particular, this means there is a gauge-coordinate transformation

$$(t, \widetilde{x}, \widetilde{y}) = (t, \varphi(t, x), \phi(t, x) \cdot \widehat{y})$$

with  $\varphi(t, 0) = 0$  on  $\widehat{T}' \times U \times \mathbf{P}^1$ , where  $\widehat{T}'$  is a submanifold of  $T_k$ , such that  $\widehat{\mathcal{F}}, \widehat{\Sigma}$  and  $s$  are given in the new coordinates by

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}} : \quad d\widetilde{y} + \frac{1}{\widetilde{x}^l} \widetilde{y}^2 d\widetilde{x} + \frac{c(\widetilde{x})}{\widetilde{x}^l} d\widetilde{x}, \quad \widehat{\Sigma} : \quad \{\widetilde{y} = \infty\}, \quad s : \quad \{\widetilde{x} = 0, \widetilde{y} = \phi(t, 0) \cdot \infty\}, \\ \text{resp.} \\ \widehat{\mathcal{F}} : \quad d\widetilde{y}, \quad \widehat{\Sigma} : \quad \{\widetilde{y} = \infty\}, \quad s : \quad \{\widetilde{x} = 0, \widetilde{y} = \phi(t, 0) \cdot \infty\}, \end{aligned}$$

if  $\widehat{\mathcal{F}}$  has a singularity of order  $\widehat{l} \geq 1$  at  $\{x = 0\}$ , respectively if  $\widehat{\mathcal{F}}$  is non-singular at  $\{x = 0\}$ . Now we can choose a subvariety  $T'$  of codimension 1 in  $\widehat{T}'$  such that  $\phi(t, 0) \cdot \infty \equiv \iota$  is constant for  $t \in T'$ . For a generic initial parameter, the germ  $(T', t_k)$  is a submanifold. In restriction to this new parameter space  $T'$ , we now can apply the inverse elementary transformation  $\widetilde{y} = \frac{\widehat{y} - \iota}{\widehat{x}}$  with center in  $s$ . Note that again, this means applying a constant elementary transformation to a constant foliation and a constant section. We obtain a constant foliation  $\widetilde{\mathcal{F}}$  and a constant section  $\widetilde{\Sigma}$ , given in these

coordinates respectively by

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} : \quad d\tilde{y} + \frac{1}{\tilde{x}^{l-1}}\tilde{y}^2 d\tilde{x} + \left(\frac{2l}{\tilde{x}^l} + \frac{1}{\tilde{x}}\right)\tilde{y}d\tilde{x} + \left(\frac{l^2+c(\tilde{x})}{\tilde{x}^{l+1}}\right)d\tilde{x}, \quad \tilde{\Sigma} : \quad \{\tilde{y} = \infty\}, \\ \text{and} \\ \tilde{\mathcal{F}} : \quad d\tilde{y} + \frac{1}{\tilde{x}}\tilde{y}d\tilde{x}, \quad \tilde{\Sigma} : \quad \{\tilde{y} = \infty\}. \end{aligned}$$

In proceeding in that way successively with all the inverse elementary transformations, beginning from  $\text{elm}_\eta^{-1}$  to  $\text{elm}_1^{-1}$ , we obtain a submanifold  $T'$  of codimension  $\eta$  in  $\hat{T}'$ , such that all the centers of the elementary transformations are constant in  $t$ . Denote by  $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\Sigma})$  the foliation and the section we obtain after applying the inverse elementary transformations. By construction,  $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\Sigma})$  can be obtained from the reduced foliation  $\mathcal{F}|_{T'}$  and the section  $\Sigma|_{T'}$  in restriction to  $T'$ , by holomorphic gauge-coordinate transformations. In these coordinates, the isomonodromic deformation with parameter space  $T'$  is trivial. Finally,  $\eta + \#\text{tang}(\hat{\mathcal{F}}_{t_k}, \hat{\sigma}_{t_k}) \leq \#\text{tang}(\mathcal{F}_{t_k}, \sigma_{t_k})$  codimensions are sufficient to locally trivialize the curve, the position of the poles and the foliation. Again, this implies that the transition maps  $(\varphi, \phi)$  are also constant in  $t$  and we have

$$((\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{X}, \mathcal{F}), \mathcal{D})|_{T'} \cong ((P_{t_k} \rightarrow X_{t_k}, \mathcal{F}_{t_k}), D_{t_k}) \times T',$$

where  $T'$  satisfies (A.25).

This concludes the proof of theorem A.1

## A.6 Further comments

In this section, we shall discuss the necessity of the hypotheses of theorem A.1.

### A.6.1 Result for reducible connections

The irreducibility of the initial connection  $\nabla_0$  is needed in the above proof only to ensure that the section  $\sigma_0$  of  $P_0$  having minimal self-intersection number is not invariant by the foliation  $\mathbf{P}(\nabla_0)$ .

Suppose now that  $(E_0, \nabla_0)$  is a reducible connection. Let  $s_0$  be a section invariant by the associated Riccati foliation. Then  $s_0$  defines a global section  $\mathcal{S} = (s_t)_{t \in T}$  invariant by the Riccati foliation associated to the universal isomonodromic deformation  $(E_t, \nabla_t)_{t \in T}$ . This section defines a holomorphic family of line bundles

$(L_t)_{t \in T}$  provided with an integrable connection  $(\zeta_t)_{t \in T}$  induced by  $\nabla$ . Since the Euler class may not vary along such a family, for each parameter  $t \in T$  we have

$$\deg L_t = \deg L_0.$$

From

$$s_t \cdot s_t = \deg \det(E_t) - 2\deg L_t = -2\deg L_t$$

we may conclude that the self-intersection number of the invariant section  $s_t$  is constant along the isomonodromic deformation. The minimal self-intersection number thus may never be greater than  $s_0 \cdot s_0$  along the universal isomonodromic deformation. If the initial connection has two distinct invariant sections, then it is in fact decomposable into a direct sum of two rank 1 connections. Along the universal isomonodromic deformation, the underlying vector bundle then remains decomposable; its degree of stability is constant and equal to

$$\tilde{k}_0 = \min\{s_0 \cdot s_0 \mid s_0 \text{ section of } E_0 \text{ invariant by } \nabla_0\}. \quad (\text{A.32})$$

If the initial connection is reducible but not decomposable, there is exactly one invariant section  $s_0$  of the initial connection. We then define  $\tilde{k}_0 = s_0 \cdot s_0$ , conformal to (A.32). Let  $k$  be an integer strictly smaller than  $\tilde{k}_0$ . Then for each parameter  $t \in T_k$ , where  $T_k$  is defined as before, any section  $\sigma_t$  of  $P_t$  with self-intersection number  $k$  is not invariant by the foliation  $\mathcal{F}_t$ . We then may apply the proof of theorem A.1 to show  $\text{codim}(T_k) \geq g - 1 - k$ . It follows the following, sharper version of theorem A.1.

**Theorem A.4** *Let  $(E_t, \nabla_t)_{t \in T}$  be the universal isomonodromic deformation of a tracefree meromorphic rank 2 connection over some Riemann surface of genus  $g$ . We define  $k_0 = g$  if the initial connection is irreducible, and  $k_0 = \min(g, \tilde{k}_0)$  with  $\tilde{k}_0$  as in (A.32) else. Then*

$$\begin{cases} T_{k_0} = T \\ \text{codim}(T_k) \geq g - 1 - k \quad \forall k < k_0. \end{cases}$$

*In particular, the vector bundle underlying the universal isomonodromic deformation is generically maximally stable if, and only if, the initial connection is irreducible or  $\tilde{k}_0 \geq g$ .*

Let us now construct examples of reducible tracefree rank 2 connections  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  such that the vector bundle underlying their universal isomonodromic deformation  $(E_t \rightarrow X_t, \nabla_t)_{t \in T}$  is not generically maximally stable. In other words,

let us construct examples of tracefree rank 2 connections  $(E_0 \rightarrow X_0, \nabla_0)$  over Riemann surfaces of genus  $g$ , which have invariant sublinebundles  $L_0$  such that

$$-2\deg L_0 < g - 1.$$

**Example A.53** Let  $\rho : \pi_1(X_0) \rightarrow \text{Aff}(\mathbf{C})$  be a representation, where we identify

$$\text{Aff}(\mathbf{C}) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbf{C}^*, \mu \in \mathbf{C} \right\}.$$

Then the Riemann-Hilbert correspondence provides a non-singular rank 2 connection over  $X_0$  with monodromy  $\rho$ , which will have an invariant sublinebundle  $L_0$ . In particular, the line bundle  $L_0$  can be provided with a non-singular connection. Thus  $\deg L_0 = 0$  (see [Wei38]). This provides such an example if  $g \geq 2$ .

**Example A.54** Let  $(E_0, \nabla_0)$  be an irreducible tracefree rank 2 connection. Denote by  $\sigma_0$  an invariant section. By an even number of elementary transformations with center on  $\sigma_0$  and renormalization afterwards (to restore the tracefreeness-condition), we can decrease arbitrarily the self-intersection number of  $\sigma_0$ .

### A.6.2 Remarks on undeformable connections

Consider tracefree rank 2 connections on a Riemann surface of genus  $g$  with  $n$  poles, counted with multiplicity. Assume  $3g - 3 + n \leq 0$ . We would like to know if they are defined on maximally stable bundles. Note that these connections are undeformable in the genus 0 case.

**Proposition A.55** *If such a connection is irreducible, then it is defined on a maximally stable bundle.*

**Proof:** Let  $\sigma$  be a section of the associated  $\mathbf{P}^1$ -bundle with minimal self-intersection number. If the connection is irreducible, we know that  $\sigma$  is not invariant by the connection. Then the formulas of M. Brunella and M. Nagata imply

$$\begin{cases} 2 - n \leq \sigma \cdot \sigma \leq 0 & \text{for } g = 0 \\ 0 \leq \sigma \cdot \sigma \leq 1 & \text{for } (g, n) = (1, 0). \end{cases}$$

We notice that for  $g = 0$ , the assumption  $n \in \{0, 1\}$  leads to a contradiction. On the other hand, the vector bundle is clearly maximally stable in the remaining cases  $(g, n) = (0, 2), (0, 3)$  and  $(1, 0)$ .  $\square$

According to the Riemann-Hilbert correspondence, a logarithmic rank 2 connection is reducible if, and only if, the corresponding monodromy representation is reducible. Since the fundamental groups of elliptic curves and the fundamental group of the Riemann sphere with at most 2 punctures is abelian, for each choice of residues, the corresponding logarithmic rank 2 connections are reducible. Yet a generic rank 2 connection with three poles (counted with multiplicity) on the Riemann sphere is irreducible. It defines a hypergeometric (Gauß or confluent) differential equation (see [Inc44]).

### A.6.3 Remarks on connections with trace

In the spirit of [Mal83a], [Mal83b], [Pal99] and [Kri02], one can also construct universal isomonodromic deformations with varying trace, provided that the leading terms of the connection matrices are non-resonant. Consider a meromorphic rank 2 connection  $(E_0, \nabla_0)$  on a Riemann surface  $X_0$  with arbitrary trace. If the degree of the line bundle  $\det(E)$  is even, then there is a tracefree meromorphic rank 2 connection  $(\tilde{E}_0, \tilde{\nabla}_0)$  and a meromorphic rank 1 connection  $(L_0, \zeta_0)$  on  $X_0$ , such that

$$(E_0, \nabla_0) = (L_0, \zeta_0) \otimes (\tilde{E}_0, \tilde{\nabla}_0).$$

Let us suppose that both  $\zeta_0$  and  $\tilde{\nabla}_0$  have the same polar divisor (counted with multiplicity) as  $\nabla_0$ . As before, the parameter space of the universal isomonodromic deformation of  $(E_0, \nabla_0)$  will have a natural product structure. One factor  $\mathcal{T}$  comes from the deformation of the punctured curve and will have dimension  $3g - 3 + m$ . The deformation by local jets of the tracefree connection  $(\tilde{E}_0, \tilde{\nabla}_0)$ , provides a second factor  $J$  of the parameter space, with dimension  $n - m$ . As for the deformation by local jets of the rank 1 connection  $(L_0, \zeta_0)$  over the universal curve, we get an additional factor  $J'$  of the parameter space, with dimension  $n - m$ . Finally, we would obtain a universal isomonodromic deformation  $(\mathcal{E}, \nabla)$  with parameter space  $T$  of dimension  $3g - 3 + 2n - m$ . An analog construction has been done in the paper of John Palmer [Pal99] for the genus 0 case.

Suppose now that the initial connection is irreducible. We then can apply the proof of theorem A.1 to the projective deformation  $(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \mathbf{P}(\nabla))$ , using the fact that the degree of stability of a rank 2 vector bundle only depends on the associated projective bundle and thus is invariant by deformation along  $J'$ . We can thus trivialize  $(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \mathbf{P}(\nabla))$  in restriction to a subspace of codimension  $2g - 2 + n - k$  in  $T_k$ , where  $T_k$  is defined as in section A.1.1. On this new parameter space, the trace connection of  $(\mathcal{E}, \nabla)$  may still vary non-trivially. However, by further restriction of the parameter space by  $\dim(J') = n - m$  codimensions, we

will be able to trivialize the deformation of the trace connection over the already trivialized curve. We obtain again

$$\mathrm{codim}(T_k) \geq g - 1 - k.$$

In particular, the vector bundle underlying such a universal isomonodromic deformation will still be generically maximally stable.





# Bibliographie

- [AB94] D. V. Anosov and A. A. Bolibruch. *The Riemann-Hilbert problem*. Aspects of Mathematics, E22. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1994.
- [BD05] Alexander Beilinson and Vladimir Drinfeld. *Opers*. arxiv : math/0501398v1, 2005.
- [Bol90] Andrej A. Bolibruch. The Riemann-Hilbert problem. *Russian Math. Surveys*, 45 :1–58, 1990.
- [Bri04] Joël Briançon. Extensions de Deligne pour les croisements normaux. In *Éléments de la théorie des systèmes différentiels géométriques*, volume 8 of *Sémin. Congr.*, pages 149–164. Soc. Math. France, Paris, 2004.
- [Bru04] Marco Brunella. *Birational geometry of foliations*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2004.
- [BT82] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1982.
- [Del70] Pierre Deligne. *Équations différentielles à points singuliers réguliers*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 163. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [DZ05] Jean-Paul Dufour and Nguyen Tien Zung. *Poisson structures and their normal forms*, volume 242 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2005.
- [EH01] Hélène Esnault and Claus Hertling. Semistable bundles on curves and reducible representations of the fundamental group. *Internat. J. Math.*, 12(7) :847–855, 2001.
- [EV99] Hélène Esnault and Eckart Viehweg. Semistable bundles on curves and irreducible representations of the fundamental group. In *Algebraic*

- geometry : Hirzebruch 70 (Warsaw, 1998)*, volume 241 of *Contemp. Math.*, pages 129–138. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [FG65] Wolfgang Fischer and Hans Grauert. Lokal-triviale Familien kompakter komplexer Mannigfaltigkeiten. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II*, 1965 :89–94, 1965.
- [Fri98] Robert Friedman. *Algebraic surfaces and holomorphic vector bundles*. Universitext. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [Fuc05] Richard Fuchs. Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 141 :555–558, 1905.
- [Gam06] E. Gambier. Sur les équations différentielles du second ordre dont l'intégrale générale est uniforme. *C. R.*, 142 :266–269, 1906.
- [GH94] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.
- [GM89] Xavier Gómez-Mont. Holomorphic foliations in ruled surfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 312(1) :179–201, 1989.
- [GR58] Hans Grauert and Reinhold Remmert. Bilder und Urbilder analytischer Garben. *Ann. of Math. (2)*, 68 :393–443, 1958.
- [Gra60] Hans Grauert. Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (5) :64, 1960.
- [Hak72] Monique Hakim. *Topos annelés et schémas relatifs*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 64.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Hub06] John Hamal Hubbard. *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics. Vol. 1*. Matrix Editions, Ithaca, NY, 2006. Teichmüller theory, With contributions by Adrien Douady, William Dunbar, Roland Roeder, Sylvain Bonnot, David Brown, Allen Hatcher, Chris Hruska and Sudeb Mitra, With forewords by William Thurston and Clifford Earle.
- [IIS06] Michi-aki Inaba, Katsunori Iwasaki, and Masa-Hiko Saito. Moduli of stable parabolic connections, Riemann-Hilbert correspondence and geometry of Painlevé equation of type VI. I. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 42(4) :987–1089, 2006.

- [IKSY91] Katsunori Iwasaki, Hironobu Kimura, Shun Shimomura, and Masaaki Yoshida. *From Gauss to Painlevé*. Aspects of Mathematics, E16. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1991. A modern theory of special functions.
- [Inc44] E. L. Ince. *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, New York, 1944.
- [IY08] Yulij Ilyashenko and Sergei Yakovenko. *Lectures on analytic differential equations*, volume 86 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2008.
- [Kat76] Nicholas M. Katz. An overview of Deligne's work on Hilbert's twenty-first problem. In *Mathematical developments arising from Hilbert problems (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XXVIII, Northern Illinois Univ., De Kalb, Ill., 1974)*, pages 537–557. Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1976.
- [Kod86] Kunihiko Kodaira. *Complex manifolds and deformation of complex structures*, volume 283 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, New York, 1986. Translated from the Japanese by Kazuo Akao, With an appendix by Daisuke Fujiwara.
- [Kri02] I. Krichever. Isomonodromy equations on algebraic curves, canonical transformations and Whitham equations. *Mosc. Math. J.*, 2(4) :717–752, 806, 2002.
- [LN83] H. Lange and M. S. Narasimhan. Maximal subbundles of rank two vector bundles on curves. *Math. Ann.*, 266(1) :55–72, 1983.
- [Lor07] Frank Loray. Okamoto symmetry of Painlevé VI equation and isomonodromic deformation of Lamé connections. In *Algebraic, analytic and geometric aspects of complex differential equations and their deformations. Painlevé hierarchies*, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B2, pages 129–136. Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2007.
- [LP07] Frank Loray and Jorge Vitório Pereira. Transversely projective foliations on surfaces : existence of minimal form and prescription of monodromy. *Internat. J. Math.*, 18(6) :723–747, 2007.
- [Mac07] Francois-Xavier Machu. Monodromy of a class of logarithmic connections on an elliptic curve. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 3 :Paper 082, 31, 2007.

- [Mal83a] B. Malgrange. Sur les déformations isomonodromiques. I. Singularités régulières. In *Mathematics and physics (Paris, 1979/1982)*, volume 37 of *Progr. Math.*, pages 401–426. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.
- [Mal83b] B. Malgrange. Sur les déformations isomonodromiques. II. Singularités irrégulières. In *Mathematics and physics (Paris, 1979/1982)*, volume 37 of *Progr. Math.*, pages 427–438. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.
- [Mal86] Bernard Malgrange. Deformations of differential systems. II. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 1(1-2) :3–15, 1986.
- [Mal96] Bernard Malgrange. Connexions méromorphes 2 Le réseau canonique. *Invent. math.*, (124) :367–387, 1996.
- [Mal04] Bernard Malgrange. Déformations isomonodromiques, forme de Liouville, fonction  $\tau$ . *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 54(5) :1371–1392, xiv, xx, 2004.
- [Mar70] Masaki Maruyama. *On classification of ruled surfaces*, volume 3 of *Lectures in Mathematics, Department of Mathematics, Kyoto University*. Kinokuniya Book-Store Co. Ltd., Tokyo, 1970.
- [Mar76] Masaki Maruyama. Openness of a family of torsion free sheaves. *J. Math. Kyoto Univ.*, 16(3) :627–637, 1976.
- [Mat91] J.-F. Mattei. Modules de feuilletages holomorphes singuliers. I. Équisingularité. *Invent. Math.*, 103(2) :297–325, 1991.
- [MN94] Jean-François Mattei and Marcel Nicolau. Equisingular unfoldings of foliations by curves. *Astérisque*, (222) :6, 285–302, 1994. Complex analytic methods in dynamical systems (Rio de Janeiro, 1992).
- [Mos65] Jürgen Moser. On the volume elements on a manifold. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120 :286–294, 1965.
- [Mum88] David Mumford. *The red book of varieties and schemes*, volume 1358 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [Nag70] Masayoshi Nagata. On self-intersection number of a section on a ruled surface. *Nagoya Math. J.*, 37 :191–196, 1970.
- [Nag88] Subhashis Nag. *The complex analytic theory of Teichmüller spaces*. Canadian Mathematical Society Series of Monographs and Advanced Texts. John Wiley & Sons Inc., New York, 1988. A Wiley-Interscience Publication.
- [NS64] M. S. Narasimhan and C. S. Seshadri. Stable bundles and unitary bundles on a compact Riemann surface. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 52 :207–211, 1964.

- [NY04] Dmitry Novikov and Sergei Yakovenko. Lectures on meromorphic flat connections. In *Normal forms, bifurcations and finiteness problems in differential equations*, volume 137 of *NATO Sci. Ser. II Math. Phys. Chem.*, pages 387–430. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2004.
- [Oka81] Kazuo Okamoto. On the  $\tau$ -function of the Painlevé equations. *Physica, 2D*, pages 525–535, 1981.
- [Oka86] Kazuo Okamoto. Isomonodromic deformation and Painlevé equations, and the Garnier system. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 33(3) :575–618, 1986.
- [Pal99] John Palmer. Zeros of the Jimbo, Miwa, Ueno tau function. *J. Math. Phys.*, 40(12) :6638–6681, 1999.
- [Var96] V. S. Varadarajan. Linear meromorphic differential equations : a modern point of view. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 33(1) :1–42, 1996.
- [Voi02] Claire Voisin. *Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe*, volume 10 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses]*. Société Mathématique de France, Paris, 2002.
- [Wei38] André Weil. Généralisation des fonctions abéliennes. *J. Math. Pures Appl.*, 40(IX) :47–87, 1938.



# Table des figures

1.1	Monodromie . . . . .	6
1.2	Lacets $\gamma_i$ associés à la monodromie locale . . . . .	7
2.1	Singularité projectivement apparente . . . . .	15
2.2	L'un des générateurs $\gamma_{i_j}$ du groupe fondamental . . . . .	16
2.3	Construction de la déformation universelle . . . . .	20
3.1	Nombre d'auto-intersection . . . . .	24
3.2	Exemple d'une section avec nombre d'auto-intersection zéro . . . .	24
3.3	Une famille de courbes . . . . .	27
3.4	Sections à paramètre . . . . .	32
3.5	Lieu des zéros des deux coordonnées d'une section . . . . .	32
3.6	Trois sections en position générale . . . . .	34
3.7	Point commun aux trois section . . . . .	35
3.8	Deux sections tangentes . . . . .	35
3.9	Transformation élémentaire . . . . .	37
3.10	Obtenir le fibré trivial . . . . .	38
3.11	Le degre de la section holomorphe induite . . . . .	42
A.1	Riccati foliation . . . . .	70
A.2	Local constancy : product structure . . . . .	72
A.3	Non-unicity in the gluing construction . . . . .	90
A.4	Flow of a family of vector fields . . . . .	92
A.5	Construction of an isomonodromic deformation by elementary transformations . . . . .	106
A.6	Different possibilities of tangency, resp. transversality . . . . .	112
A.7	Deformation of a Riccati foliation . . . . .	113
A.8	Case of transversality . . . . .	114
A.9	Tangency remains in the leaf . . . . .	116

A.10 Tangency changes the leaf . . . . .	117
--	-----





## Résumé

Nous considérons les fibrés à connexion non-singulière ou méromorphe, de rang 2 et sans trace sur les surfaces de Riemann compactes de genre quelconque.

En déformant la courbe, la position des pôles et la connexion, nous construisons la déformation isomonodromique universelle d'un tel fibré à connexion. Notre construction spécifique au cas du rang 2 et sans trace est plus élémentaire que la construction en rang quelconque due à B. Malgrange et I. Krichever au sens où elle ne nécessite pas d'analyse de Stokes des singularités irrégulières. De plus, elle englobe le cas des singularités résonantes de manière naturelle.

Nous montrons que le fibré vectoriel sous-jacent à la déformation isomonodromique universelle est génériquement «maximalement» stable, pourvu que le fibré à connexion initial soit irréductible. À cette fin, nous démontrons une version analytique du résultat de semicontinuité de M. Maruyama, puis nous nous ramenons à un problème de transversalité de feuilletages. À l'aide d'exemples explicites, nous montrons que la condition d'irréductibilité est nécessaire et que l'ensemble analytique des paramètres «non génériques» au sens ci-dessus peut être non algébrique.

## Abstract

We consider irreducible tracefree non-singular or meromorphic rank 2 connections over compact Riemann surfaces of arbitrary genus.

By deforming the curve, the position of the poles and the connection, we construct the universal isomonodromic deformation of such a connection. Our construction, which is specific to the tracefree rank 2 case, does not need any Stokes analysis for irregular singularities. It is thereby more elementary than the construction in arbitrary rank due to B. Malgrange and I. Krichever and it includes the case of resonant singularities in a natural way.

We prove that the underlying vector bundle is generically maximally stable along the universal isomonodromic deformation, provided that the initial connection is irreducible. For that purpose, we use an analytic version of M. Maruyama's semicontinuity-result and we explain the problem geometrically in terms of transversality in foliations. By means of explicit examples we show that the irreducibility-condition is necessary and that the analytic set of parameters which are non-generic in the above sens can be non-algebraic.